Übungen zu Dynamische Systeme — Blatt 1

16. Oktober 2015

A 1.1 Es seien X, Y metrische Räume und S ein Dynamisches System (DS) auf X mit Zeit T. Man untersuche, ob $\tilde{S}$ ein DS ist.

1. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $\tilde{S}(t)x := S(\lambda t)x$ für alle $x \in X$ und alle t mit $\lambda t \in T$.

2. Für $\Phi: Y \to X$ stetig und stetig invertierbar.

   Sei $\tilde{S}(t)y := \Phi^{-1}(S(t)\Phi(y))\ \forall t \in T, y \in Y$.

A 1.2 Sei I ein abgeschlossenes Intervall (auch uneigentlich) und S ein DS auf $X = I$ mit Zeit $[0, \infty)$. Man zeige, dass S die Ordnung erhält. Genauer: $x \leq y \Rightarrow S(t)x \leq S(t)y\ \forall t \geq 0$.

A 1.3 Ist S ein DS, das durch Iteration der Abbildung F erzeugt wird, dann gilt:

$O^+(x)$ ist ein k-periodischer Orbit, genau dann, wenn x ein Fixpunkt von $F^{(k)} = \underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{k-mal}$ ist.

A 1.4 Für die Zeltabbildung $f(x) = 1 - |2x - 1|$ mit $x \in [0, 1]$ bestimme man alle periodischen Orbits.

Hinweis: Man skizziere zunächst $f, f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$

Übungen zu Dynamische Systeme Blatt 2

23. Oktober 2015

A 2.1 Es sei f: $[0,\ 1] \to [0,\ 1]$ zweimal stetig differenzierbar. Weiterhin sei a ein Fixpunkt von f (d.h. $f(a) = a$).

a) Gilt $|f'(a)| < 1$, so ist a asymptotisch stabil. D.h.

$\exists \delta > 0$ mit $f^{(n)}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \ \forall x \in [a-\delta, a+\delta]$.

b) Gilt $|f'(a)| > 1$, so ist a instabil. D.h.

$\exists \delta > 0$ so dass $\forall x \in [a-\delta, a+\delta] \setminus \{a\}\ \exists n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(x) - a| > \delta$.

Bemerkung: Man vergleiche die Aussage mit dem Satz über linearisierte Stabilität von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

A 2.2 Man untersuche, ob der Vektorraum

$$C_0^0(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ mit } f(x) \to 0 \text{für } |x| \to \infty\}$$

mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ vollständig ist.

A 2.3 Sei $X = \{f \in C^0(\mathbb{R}),\ f \text{ beschränkt}\}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\,.\,\|_\infty$. Man zeige:

a) Der Rechtsschift $[S(t)f] = f(x-t)$ erzeugt auf X kein DS.

b) Versieht man X mit der Norm $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$ so ist der Rechtsschift ein DS.

Hinweis: Die Vollständigkeit von X bzgl. $\|\,.\,\|$ kann ohne Beweis angenommen werden.

c) Man zeige: $f \in X$ ist periodisch genau dann, wenn $O^+(f)$ ein periodischer Orbit ist.

A 2.4 Es ist $X = \{f \in C^0([0,\ \infty)),\ f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ bzgl. der Supremumsnorm ein vollständiger normierter Raum. Auf X definiere man den Linksschift $S_\ell(t)$, $t \geq 0$ durch

$$[S_\ell(t)f](x) = f(x+t)$$

und den Rechtsschift $S_r(t)$, $t \geq 0$ durch

$$[S_r(t)f](x) = \begin{cases} f(x-t) & , \ x \geq t \\ f(0) & , \ x < t \end{cases}.$$

a) Man zeige, dass S_ℓ und S_r Halbflüsse sind.

b) Man begründe, warum man sie nicht zu einem Fluß fortsetzen kann.

c) Man untersuche das Langzeitverhalten für $t \to \infty$.

Übungen zu Dynamische Systeme — Blatt 3

30. Oktober 2015

A 3.1 Bestimme den Erzeuger der Halbgruppe e^{tA} aus (3.7) mit seinem Definitionsbereich.

A 3.2 Seien H ein Hilbertraum, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis von H und $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer Zahlen. Definiere auf H einen Operator e^{tA} durch

$$\mathrm{e}^{tA} e_k := \mathrm{e}^{-t\lambda_k} e_k.$$

Weiterhin sei ein Operator A durch

$$A e_k := -\lambda_k e_k$$

auf $D(A) := \{u \in H : Au \in H\}$ definiert. Bestimme explizit $D(A)$ und zeige:

a) A ist der Erzeuger von e^{tA} und $D(A) = \left\{ u \in H : \exists \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{tA} u - u}{t} \right\}$.

b) Ist $\lambda_k \leqslant C$ für alle k und ein $C > 0$, so ist e^{tA} eine C_0-Halbgruppe und A ist deren Erzeuger.

c) Gilt $\lambda_k \nearrow +\infty$, so ist e^{tA} eine analytische Halbgruppe.

Hinweis: Vergleiche §3 Teil B.

A 3.3 Es seien $S(t)$, $t \geqslant 0$ stetige lineare Operatoren auf den Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ mit der Flusseigenschaft $S(t)S(s) = S(t+s)$ für alle $t, s \geqslant 0$. Weiterhin gelte für alle $u \in X$:

$$\lim_{t\searrow 0} S(t) u = u.$$

Zeige:

a) Es existiert ein $\delta > 0$ und ein $M > 0$, so dass

$$\|S(t) u\| \leqslant M \|u\| \text{ für alle } u \in X \text{ und alle } t \in [0, \delta].$$

b) Es existiert ein $\tilde{M} > 0$ und ein $w \in \mathbb{R}$, so dass

$$\|S(t) u\| \leqslant \tilde{M} \mathrm{e}^{tw} \text{ für alle } t \geqslant 0 \text{ und alle } u \in X.$$

Insbesondere ist S eine stark stetige Halbgruppe. D.h. $t \mapsto S(t) u$ ist für jedes $u \in X$ stetig.

Übungen zu Dynamische Systeme — Blatt 4

6. November 2015

A 4.1 **Definition.** *Eine Menge A ist* ***positiv invariant*** *unter dem Fluss $(S(t))_{t\in\mathbb{T}}$ genau dann, wenn $S(t)\,A\subset A$ für alle $t\in\mathbb{T}$. Sie ist* ***strikt invariant*** *genau dann, wenn $S(t)\,A=A$ für alle $t\in\mathbb{T}$.*

Es sei S das von der linearen Differentialgleichung $\dot{x}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}x$ induzierte dynamische System auf $X=\mathbb{R}^2$ mit Zeit $\mathbb{R}$. Geben Sie Mengen $B\subset X$ mit den folgenden Eigenschaften an:

1. offen und strikt invariant mit $B\neq X$,
2. offen und positiv invariant, aber nicht strikt invariant,
3. abgeschlossen mit nichtleerem Inneren und strikt invariant,
4. abgeschlossen mit nichtleerem Inneren und positiv invariant, aber nicht strikt invariant.

Hint: $S(t)\,x=\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}x$.

A 4.2 Es sei $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge positiver Zahlen und S der Halbfluss auf ℓ^2, der durch

$$S(t)\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-t\lambda_k}a_k e_k$$

definiert wird. Man zeige:

1. Gilt $\lambda_k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, so ist S nicht beschränkt dissipativ.
2. Gilt $\lambda_k\geqslant\delta>0\quad\forall k\in\mathbb{N}$, so ist S beschränkt dissipativ.
3. Gilt $\lambda_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$, so ist S dissipativ.

Hint: Ist B eine beschränkt anziehende Menge aus 2., so genügt es die Kompaktheit von $S(t)\,B$ für ein $t>0$ zu zeigen.

A 4.3 Sei S ein Halbfluss mit Zeit $\mathbb{T}$. Man zeige:

1. $\omega(S(t)B)=\omega(B)$ für alle $t\in\mathbb{T}$ und alle $B\subset X$.
2. $M\supset B\Rightarrow\omega(M)\supset\omega(B)$.

Sei nun $B\subset X$ beschränkt absorbierend und M beschränkt. Dann gilt:

3. $\omega(M)\subset\omega(B)$.
4. $M\supset B\Rightarrow\omega(M)=\omega(B)$.

Übungen zu Dynamische Systeme **Blatt 5**

13. November 2015

A 5.1 Sei S ein dynamisches System, so dass für alle beschränkten Mengen M eine Zeit $t_0 > 0$ existiert mit $S(t_0)\,M$ kompakt. Man zeige: Ist B eine beschränkte und beschränkt absorbierende Menge, so hat S einen globalen Attraktor.

A 5.2 Es sei S ein dynamisches System mit globalem Attraktor A.

1. Man zeige, dass es eine beschränkte und beschränkt absorbierende Menge B gibt.

2. Man finde ein Beispiel, dass S im Allgemeinen nicht dissipativ ist.

   Hinweis: Kugeln im unendlich dimensionalen Vektorraum sind nicht kompakt.

A 5.3 Sei $(S(t))_{t\geqslant 0}$ der Rechtsshift auf $C_0^0(\mathbb{R})$. D.h. $[S(t)\,f](x) = f\,(x-t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Bestimme $\omega(\{f\})$ für $f \in C_0^0(\mathbb{R})$.

2. Zeige, dass S nicht dissipativ ist.

3. Zeige, dass S keinen globalen Attraktor hat.

A 5.4 **(Lorenz Attraktor)** Es sei folgende das System gewöhnlicher Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^3$ gegeben

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y, \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - bz, \end{cases}$$

wobei $\sigma, r, b > 0$. Man beweise, dass das zugehörige dynamische System einen globalen Attraktor besitzt.

Hinweis: Man betrachte folgende Funktion: $x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$.

Prof. Dr. Dirk Blömker || Miguel de Benito M.Sc. Universität Augsburg

Übungen zu Dynamische Systeme **Blatt 6**

20. November 2015

A 6.1 Es sei S ein dynamisches System in $\mathbb{R}^n$ mit Zeit $[0, \infty)$, so dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Kurve $t \mapsto x(t) := S(t)\,x_0$, $t > 0$ differenzierbar ist mit $x'(t) = -\nabla E(x(t))$, wobei $E\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar ist.

1. Es gelte $E(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$ und es existiere $R > 0$, $\delta > 0$ mit $|\nabla E(x)| > \delta$ falls $|x| > R$. Dann existiert ein globaler Attraktor.
2. Man finde ein Beispiel mit $E(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$, aber ohne globalen Attraktor.
3. Kann man in 1. $\delta = 0$ wählen?

A 6.2 Sei $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ das von der Gleichung $x' = f(x)$ erzeugte dynamische System, wobei $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^m$ eine Ruhelage des Systems und $V \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ eine Lyapunov Funktion für das System, so dass x_0 ein Minimierer von V ist. Zeigen Sie:

a) V ist auf den ω-Limesmengen einzelner Punkte konstant. Das bedeutet: Ist $x \in \mathbb{R}^m$ und sind $x_1, x_2 \in \omega(\{x\})$, so ist $V(x_1) = V(x_2)$. Insbesondere gilt

$$\omega(x) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^m : \dot{V}(y) = 0\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^m.$$

b) Es existiert eine beschränkte Umgebung U von x_0, so dass für jedes $x \in U$ gilt: $\omega(x)$ ist kompakt und positiv invariant.

c) Enthält die Menge $\{x \in \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\} : \dot{V}(x) = 0\}$ keine positiv invariante Teilmenge, so ist $\omega(x) = \{x_0\}$ für alle $x \in U$. Die Ruhelage x_0 ist dann asymptotisch stabil.

d) Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass das durch

$$\begin{cases} x' &= -y + xz \\ y' &= x + yz \\ z' &= -z - (x^2 + y^2) + z^2 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^3$ erzeugte dynamische System im Koordinatenursprung eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage hat. Verwenden Sie $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

A 6.3 Es sei $(S(t))_{t\in\mathbb{T}}$ ein dynamisches System mit Energie $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, das heißt:

$$x(t) = S(t)\, x_0$$

löst

$$x'(t) = -\nabla E(x(t)),$$

wobei

$$E\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := \begin{cases} -\mathrm{e}^{1/(r^2-1)} & \text{für} \quad r<1, \\ 0 & \text{für} \quad r=1, \\ -\mathrm{e}^{-1/(r^2-1)} \sin\left(\frac{1}{r-1} - \varphi\right) & \text{für} \quad r>1. \end{cases}$$

Man zeige:

a) $\nabla E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S^1 \cup \{0\}$,

b) $E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S^1 \cup E_1 \cup E_2$,

wobei

$$\begin{aligned} S^1 &= \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \colon r = 1\}, \\ E_1 &= \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \colon r = 1 + \tfrac{1}{k\pi+\varphi},\ \varphi \in (0, 2\pi), k \text{ gerade}\right\}, \\ E_2 &= \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \colon r = 1 + \tfrac{1}{k\pi+\varphi},\ \varphi \in (0, 2\pi), k \text{ ungerade}\right\}. \end{aligned}$$

Man definiere

$$I = \{(s, 0) \colon 1 + \frac{1}{2\pi} \leq s \leq 1 + \frac{1}{\pi}\}$$

und U als das von I, E_1, E_2 berandete Gebiet, welches sich unendlich oft um S^1 windet. Setze

$$J := \{x \in I \colon \exists\, t^* > 0 \ \text{ mit } \ S(t)x \in U \ \text{ für } \ 0 < t < t^* \ \text{ und } \ S(t^*)x \in E_1\}$$

Man zeige:

c) $J \neq \varnothing$,

d) $y := \inf J \in I$, wobei das Infimum nur bezüglich der 1. Komponente genommen wird,

e) $\omega(\{y\}) = S^1$.

Übungen zu Dynamische Systeme **Blatt 7**

4. Dezember 2015

A 7.1 Es sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, und S das von F durch Iteration erzeugte dynamische System mit $S(1)=F$. Zeigen Sie: Für ein $R>0$ gelte $\langle x, F(x)\rangle > |F(x)|^2$, falls $|x|>R$, dann besitzt S einen globalen Attraktor.

Was ist die geometrische Interpretation der Voraussetzung?

Anleitung:

1. $\exists K>R$ mit $B_K(0)\supset F(B_R(0))$,
2. $B=\overline{B_K(0)}$ ist positiv invariant,
3. B ist beschränkt absorbierend.

A 7.2 Man löse mit der Variation der Konstanten die Gleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) &= -x(t), & x(0)=x_0, \\ y'(t) &= -y(t)+x(t)^3, & y(0)=y_0, \\ z'(t) &= z(t)+y(t)^2, & z(0)=z_0. \end{cases}$$

Das dynamische System $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ mit $S(t)\,(x_0, y_0, z_0) := (x(t),\ y(t),\ z(t))$ hat den Fixpunkt $\mathscr{O}=(0,0,0)$. Man berechne $W^s(\mathscr{O})$ und $W^u(\mathscr{O})$.

A 7.3 Sei $(S(t))_{t\in\mathbb{T}}$ ein dynamisches System auf einen Banachraum X. S besitze den globalen Attraktor $\mathscr{A}$ und V sei eine starke Ljapunov-Funktion auf $\mathscr{A}$. Man betrachte S als dynamisches System auf $\mathscr{A}$ und definiere

$$\mathscr{E} := \{x\in X : x \text{ ist ein Gleichgewicht von } S\}.$$

Beweisen Sie:

$$\mathscr{A} = W^s(\mathscr{E})$$

und, wenn $\mathscr{E}$ diskret ist,

$$\mathscr{A} = \bigcup_{z\in\mathscr{E}} W^s(z).$$

Prof. Dr. Dirk Blömker || Miguel de Benito M.Sc. Universität Augsburg

Übungen zu Dynamische Systeme **Blatt 8**

11. Dezember 2015

A 8.1 Man betrachte die Gleichung

$$\partial_t u = -\partial_x^4 u - \partial_x \left(\frac{\partial_x u}{1 + |\partial_x u|^2} \right) \tag{1}$$

für L-periodische Lösungen, und nehme an, dass S ein dynamisches System in $H := L^2([0, L])$ ist, mit den Eigenschaften:

i. $u(t,x) := [S(t)u_0](x)$ für $u_0 \in H$ ist eine in x L-periodische Funktion.

ii. $u \in C^\infty((0,\infty) \times [0,L])$.

iii. u erfüllt (1).

Hintergrund: Dies ist eine Modelgleichung aus dem Wachstum kristalliner Oberflächen, und u ist der Graph der Oberfläche.

Man zeige:

a) *Poincaré-Ungleichung*. Sei

$$H^1([0,L]) := \{u \in L^2 : \exists u' \in L^2 \text{ mit } u(x) = u(0) + \int_0^x u'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \text{ für alle } x \in [0,L]\}.$$

Es existiert $C > 0$, so dass

$$\|u\|_{L^2} \leqslant C\,\|u'\|_{L^2} \text{ für alle } u \in H^1([0,L]) \text{ mit } \int_0^L u = 0.$$

b) *Massenerhaltung*: Für alle Trajektorien $(u(t))_{t\geqslant 0}$ gilt

$$\int_0^L u(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L u(0,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } t > 0.$$

Im Folgendem betrachten wir das dynamische System auf

$$X = \left\{ f \in H : \int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

c) In X ist ein hinreichend großer Ball eine beschränkt absorbierende Menge für S.

d) In X existiert eine kompakte beschränkt absorbierende Menge.

e) $\partial_t \|\partial_x u\|_{L^2}^2$ ist gleichmäßig beschränkt entlang von Trajektorien.

f)

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 - \ln(1 + |\partial_x u|^2)\,\mathrm{d}x$$

ist eine starke Ljapunov-Funktion.