Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 1 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 23. April, *in (örtlich)* und *vor (zeitlich)* der Globalübung, also bis spätestens 12:15 Uhr. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Klassifiziere die folgenden Differentialgleichungen nach Ordnung, Linearität, Autonomie, Skalareigenschaft und Homogenität:

- $\dot{x} = 2 \cdot x^2$
- $y'(x) = x \cdot \sin(y(x))$
- $x''(t) = \frac{F}{m}$, wobei $x : I \to \mathbb{R}^3$
- $\ddot{x} = 3 \cdot \dot{x} - 17$
- $\dot{x}(t) = -2 \cdot x(t-1)$

**Aufgabe 2:** Finde eine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\dot{x} = x^3 \cdot t$$

Tipp: Trennung der Variablen

**Aufgabe 3:** Finde eine Lösung für das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2 \cdot x + e^t \\ x(0) &= -1 \end{cases}$$

Tipp: Variation der Konstanten

**Aufgabe 4:** Finde eine Lösung für die folgende nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}^2 + 2 \cdot x = 2$$

Tipp: Diese Differentialgleichung ist ein Spezialfall von

$$\frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + m \cdot g \cdot x = m \cdot g \cdot h$$

für $g = h = 1$. Kommt dir diese Differentialgleichung bekannt vor?

---

Die folgenden Aufgaben werden voraussichtlich in den Präsenzübungen besprochen und müssen weder vorher bearbeitet noch abgegeben werden.

**Präsenzaufgabe 1:** Finde eine Lösung für die folgende Dgl, falls sie existiert

- $x\dot{x} + t = 1$
- $\dot{x} = 10^{x+t}$

**Präsenzaufgabe 2:** Finde eine Lösung für das folgende Anfangswertproblem, falls sie existiert

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2 \cdot x - e^t \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 2 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 30. April, *in (örtlich)* und *vor (zeitlich)* der Globalübung, also bis spätestens 12:15 Uhr. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Hilf mit beim Eindeutigkeitsbeweis aus der Vorlesung und zeige: Es sei $I$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Der Funktionsraum

$$X = \left\{ x : I \to \mathbb{R}^N : \ \|x\|_\infty = \sup_{t \in I} \|x(t)\|_2 < \infty \right\}$$

ist dann ein Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$. (Bemerkung: $\|w\|_2$ ist hier die gewöhnliche euklidische Norm im $\mathbb{R}^N$.)

**großartige Spaßaufgabe 2:** Zeige, dass Trennung der Variablen nicht nur ein „blöder Trick“ ist: Es seien $I$ und $M$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und $x_0 \in M$. Außerdem seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : M \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g \neq 0$ auf $M$.

Dann hat die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t) \cdot g(x(t))$$

eine eindeutige Lösung zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$, die auf einer lokalen Umgebung von $(t_0, x_0)$ definiert ist.

**Aufgabe 3:** Finde durch Raten alle Lösungen von

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha x &= 0 \\ x(0) &= a \\ \dot{x}(0) &= b \end{aligned}$$

zu $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Beachte, dass $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$ qualitativ unterschiedliche Fälle sind.

---

Die folgenden Aufgaben werden voraussichtlich in den Präsenzübungen besprochen und müssen weder vorher bearbeitet noch abgegeben werden.

**Präsenzaufgabe 1:** Zeige, dass $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ in keiner Umgebung des Nullpunktes Lipschitzstetig ist. Stelle eine Differentialgleichung auf, die damit die Voraussetzung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes nicht erfüllt.

**Präsenzaufgabe 2:** Es sei $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ eine Funktion, sodass $f$ und $\frac{\partial f}{\partial x}$ beide stetig sind. Zeige, dass $f$ dann die lokale Lipschitzeigenschaft besitzt.

**Präsenzaufgabe 3:** Löse und beschreibe geometrisch die Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} &= e^t \\ y\dot{x} - x\dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

**Präsenzaufgabe 4:** Löse $\dot{x} = x^2 + 2tx + t^2 - 1$.

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

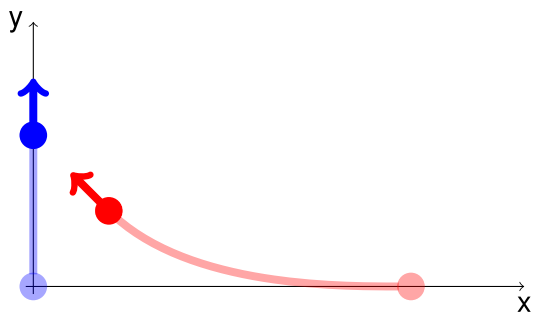
# Blatt 3 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 7. Mai, *in (örtlich)* und *vor (zeitlich)* der Globalübung, also bis spätestens 12:15 Uhr. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

### Aufgabe 1: Mathematische Modellierung

Ein hungriger Raptor, $r$ Meter östlich von dir, hat dich erspäht und ein kurzer Sprint über eine Distanz von $l$ Metern nach Norden trennt dich noch von einem sicheren Bunker. Der Raptor rennt immer in exakt deine Richtung (er versucht nicht, dir den Weg abzuschneiden). Seine Jagdgeschwindigkeit ist konstant $w$, deine Sprintgeschwindigkeit ist konstant $v$. Wir wollen ausrechnen, ob du ihm entkommen kannst.

Die Koordinaten können wie im Bild gewählt werden: Die Trajektorie des Raptors ist ein Graph $(x, y(x))$. Du selber startest im Koordinatenursprung.




i) Leite die zugehörige Differentialgleichung

$$\begin{cases} x \cdot y'' = \dfrac{v}{w}\sqrt{1+(y')^2} \\ y(r) = 0 \\ y'(r) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(noch unter Ignorierung der Tatsache, dass es einen Bunker gibt) her. Beachte, dass hier die gesuchte Bewegungsgleichung des Raptors in Abhängigkeit von der x-Koordinate angegeben wird; also nicht als eine Funktion $t \mapsto (x(t), y(t))$, sondern vielmehr in der Form $x \mapsto y(x)$. Überlege, warum diese Einschränkung sinnvoll und erlaubt ist.

ii) Löse die Differentialgleichung (1) unter Berücksichtigung aller Fälle $v \gtreqless w$. Tipp: Verwende die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen $(\sinh, \cosh)$, um schwierige Integrale zu berechnen.

iii) (Bonusaufgabe) Leite Bedingungen an die Parameter $r$ und $l$ her, um den Bunker erreichen zu können.

### Aufgabe 2: Produkt und Quotient Lipschitz-stetiger Funktionen

Ist $D$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{M+N}$ und sind $g : D \to \mathbb{R},\ (s,x) \mapsto g(s,x)$ und $h : D \to \mathbb{R},\ (s,x) \mapsto h(s,x)$ zwei stetige und bezüglich $x$ Lipschitz-stetige Funktionen, so ist auch das Produkt $g \cdot h$ und – sofern $h$ keine Nullstelle in $D$ besitzt – auch der Quotient $\frac{g}{h}$ stetig und bezüglich $x$ Lipschitz-stetig.

**Aufgabe 3: Exakte Differentialgleichung**

Zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist. Bestimme ihre Stammfunktion, zeichne ihre Niveaulinien und bestimme ihre allgemeine Lösung $\lambda(t;\tau,\xi)$:

$$\dot{x} \cdot t^2 + 2 \cdot t \cdot x + e^t = 0$$

---

Die folgenden Aufgaben werden voraussichtlich in den Präsenzübungen besprochen und müssen weder vorher bearbeitet noch abgegeben werden.

**Präsenzaufgabe 1:** Zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist. Bestimme ihre Stammfunktion, zeichne ihre Niveaulinien und bestimme ihre allgemeine Lösung $\lambda(t;\tau,\xi)$:

$$\dot{x} \cdot t + x + t^2 = 0$$

**Präsenzaufgabe 2:** Gib zu folgender Stammfunktion die dazugehörige exakte Differentialgleichung an, zeichne Niveaulinien und bestimme ihre allgemeine Lösung $\lambda(t;\tau,\xi)$:

$$S(t,x) = t \cdot x \cdot e^x$$

Universität
Augsburg
University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 4 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 14. Mai, *in (örtlich)* und *vor (zeitlich)* der Globalübung, also bis spätestens 12:15 Uhr. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Versuche, für die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht exakte Differentialgleichung *trotzdem* eine Stammfunktion zu bestimmen

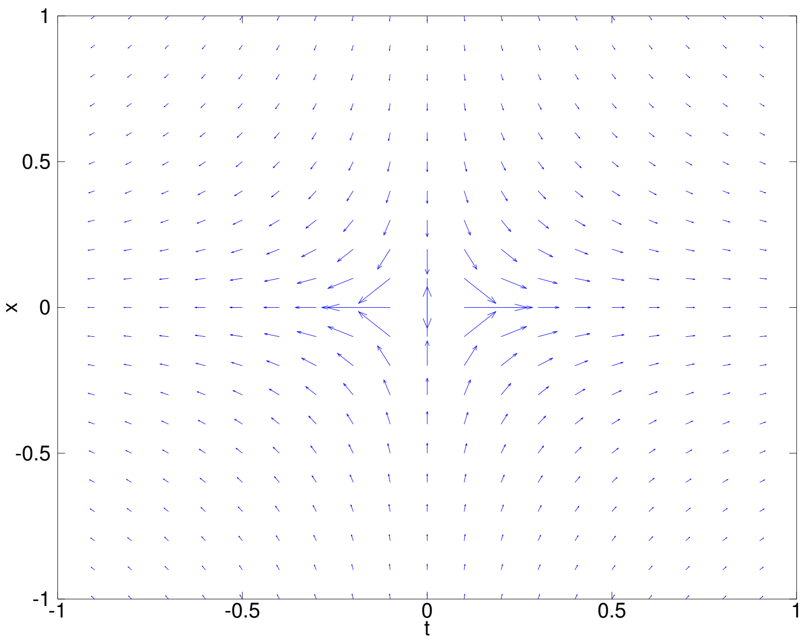
$$\dot{x}\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{x}{t^2+x^2} = 0,$$

indem du folgende Schritte durchführst:

- Schreibe $S(t,x) = \int h(t,x)\mathrm{d}t + c(x)$
- Leite nach $x$ ab und stelle eine Differentialgleichung für $c(x)$ auf, die du dann löst. Damit erhältst du eine Funktion $S(t,x)$, die mit gewissen Einschränkungen die Bedingungen an eine Stammfunktion erfüllt.

Was passiert dabei? (Mit anderen Worten: „Was geht schief?“)

(Wie man im nachfolgenden Plot des Vektorfeldes $(g(t,x), h(t,x))$ mit $g(t,x) = \frac{t}{t^2+x^2}$ und $h(t,x) = -\frac{x}{t^2+x^2}$ sehen kann, ist der Nullpunkt ein Problem (wie auch schon in der Vorlesung gezeigt wurde).)



**Aufgabe 2:** Zeige, dass die Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot t - x = 0$$

keinen auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten integrierenden Faktor besitzt. Bedeutet das, dass die Gleichung nicht explizit lösbar ist? Bestimme ferner in jeder der beiden Mengen $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0\}$ und $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ einen integrierenden Faktor und erkläre den scheinbaren Widerspruch zum ersten Teil der Aufgabe.

**Aufgabe 3:** Bestimme einen integrierenden Faktor für

$$(t + x) + \tan t \cdot \dot{x} = 0$$

und bestimme die allgemeine Lösung. Tipp: Der integrierende Faktor hängt nur von einer der beiden Variablen $x$ und $t$ ab.

**Aufgabe 4:** Bestimme einen integrierenden Faktor für

$$\dot{x} \cdot (t \cdot x^2 - t^2) - x^3 = 0$$

und bestimme die allgemeine Lösung. Tipp: Der integrierende Faktor ist wieder von einer speziellen Form (versuche nacheinander die Beispiele in der Vorlesung, wo $m(t, x) = m(t + x)$ etc.).

---

Die folgenden Aufgaben werden voraussichtlich in den Präsenzübungen besprochen und müssen weder vorher bearbeitet noch abgegeben werden.

**Präsenzaufgabe 1:** Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{\sin t}{t^2} \cdot e^{-x} - \frac{2}{t}$$

**Präsenzaufgabe 2:** Bestimme für die Differentialgleichung

$$2 \cdot t \cdot \dot{x} + 3 \cdot t + x = 0$$

integrierenden Faktor, Definitionsbereich, Stammfunktion, und allgemeine Lösung.

**Präsenzaufgabe 3:** Zeige: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion, so besitzt die Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot (x \cdot f(t^2 + x^2) - t) + x + t \cdot f(t^2 + x^2) = 0$$

einen nur von $t^2 + x^2$ abhängigen integrierenden Faktor.

Universität
Augsburg
University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 5 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 21. Mai, *in (örtlich)* und *vor (zeitlich)* der Globalübung, also bis spätestens 12:15 Uhr. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie dass jedes nichtautonome Anfangswertproblem erster Ordnung $\dot{x} = f(t, x)$ äquivalent zu einem *autonomen* Anfangswertproblem erster Ordnung, aber dafür höherer Dimension ist.

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass für die maximale Lösung eines den Standardvoraussetzungen genügenden Anfangswertproblems auch folgende Eigenschaften gelten können:

(a) Die der Aussage (b) des Satzes 1.23 beschreibene Unbeschränkheit liegt nicht in Form der uneigentlichen Konvergenz $\lim_{t\to I^+} ||\lambda_{max}(t)|| = \infty$ vor.

(b) Trotz $I^+ = +\infty$ gilt die Beziehung $\lim_{t\to I^+} dist((t, \lambda_{max}(t)), \partial\tilde{D}) = 0$

**Aufgabe 3:** Sei $f : \mathbb{R}^{1+N} \to \mathbb{R}^N$ eine stetige und bezüglich $x$ Lipschitzstetige Funktion mit $f(t, x) = 0$ für alle $(t, x)$ aus einer Menge der Form

$$M_\rho := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+N} | ||x|| > \rho > 0\}.$$

Zeigen Sie dass dann die maximale Lösung zu jedem der Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ existiert. Gilt die Aussage noch, falls $f(t, x)$ auf $M_\rho$ nur beschränkt, oder gar linear beschränkt ist?

**Aufgabe 4:** Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die nicht (!) linear beschränkt ist, wobei aber trotzdem alle maximaler Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 6 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 28. Mai, *in (örtlich)* und *vor (zeitlich)* der Globalübung, also bis spätestens 12:15 Uhr. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Zeige, dass die Wronski-Determinante $w$ die folgende Dgl erfüllt:

$$\dot{w}(t) = \operatorname{Spur} A(t) \cdot w(t)$$

und daher gilt

$$w(t) = \exp\left(\int_\tau^t \operatorname{Spur} A(s) ds\right) \cdot w(\tau)$$

**Aufgabe 2:** Zeige die Beziehung

$$L(g) = \{\lambda_g(\cdot;\tau,\xi) : \ \xi \in \mathbb{R}\}$$

und dass die rechte Seite unabhängig von der Anfangszeit $\tau$ ist.

**Aufgabe 3:** Es sei $\mu_1, \cdots, \mu_N$ ein Fundamentalsystem von $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$. Bestimme, in welcher Weise Koeffizienten $c_1, \cdots c_N$ in Abhängigkeit von $\tau$ und $\xi$ gewählt werden müssen, damit

$$\lambda_0(t;\tau,\xi) = c_1\mu_1(t) + \cdots + c_N\mu_N(t)$$

gilt.

**Aufgabe 4:** Finde die Übergangsmatrix für

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} + 5 & \frac{2}{t} + 3 \\ -\frac{1}{t} - 5 & \frac{1}{t} - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 7 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Mittwoch, 3. Juni, in der Vorlesung. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

### Aufgabe 1: Clairaut-Gleichung

Lies und verstehe das Kapitel „Clairaut-Gleichung" in der Datei `Clairautgleichung.pdf` im Digicampus und wende dein neu erworbenes Wissen auf die Gleichung

$$y(x) = x \cdot y'(x) - (y'(x))^2$$

an. Bestimme sämtliche Lösungen und skizziere sie.

### Aufgabe 2: Autonome lineare Differentialgleichung

Bestimme die allgemeine Lösung zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tipp: Bestimme Eigenwerte und (verallgemeinerte) Eigenvektoren, bringe die Matrix auf Jordannormalform und benutze die Eigenschaften des Matrixexponentials.

**Aufgabe 3:** Zeichne das Phasenporträt von $\dot{x} = A \cdot x$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Präsenzaufgabe 1:** Bestimme das Matrixexponential $\exp(tA)$ zu

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tipp: Das charakteristische Polynom von $A$ ist $-\lambda^3+8\lambda^2-21\lambda+18$. Zeichne das Phasenporträt von $\dot{x} = A \cdot x$

**Präsenzaufgabe 2:** Bestimme das Matrixexponential

$$\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ -\sigma & \rho \end{pmatrix}\right)$$

per Diagonalisierung der Matrix über $\mathbb{C}$ (also ohne den Trick $\frac{d}{dt}\exp(At) = A \cdot \exp(At)$). Zeichne das Phasenporträt von $\dot{x} = A \cdot x$ und differenziere dabei zwischen verschiedenen Vorzeichen von $\rho$ und $\sigma$.

**Präsenzaufgabe 3:** Bestimme das Matrixexponential

$$\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}\right)$$

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 8 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 11. Juni, vor der Globalübung. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Berechne die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2:** Bestimme zwei reelle $2 \times 2$-Matrizen $A$ und $B$ derart, dass

$$e^{At} \cdot e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$$

**Aufgabe 3:** Bestimme für die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung

$$u^{(4)} = 2 \cdot u^{(3)} - \ddot{u}$$

ein Fundamentalsystem und die Lösung zur Anfangsbedingung

$$u(0) = 1, \dot{u}(0) = 2, \ddot{u}(0) = 3, u^{(3)}(0) = 4$$

**Aufgabe 4:** Berechne auf dem Intervall $(0, \infty)$ ein Fundamentalsystem der skalaren Differentialgleichung

$$\ddot{u} + \frac{2}{t} \cdot \dot{u} - \frac{6}{t} \cdot u = 0$$

**Präsenzaufgabe 1:** Bestimme zu folgenden homogenen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung:

$$u^{(3)} - 2 \cdot u'' - u' + 2 \cdot u = 0$$
$$u'' + 4 \cdot u' + 5 \cdot u = 0$$

**Präsenzaufgabe 2:** Bestimme die allgemeine Lösung zu

$$u^{(3)}(t) - 3 \cdot u'(t) + 2 \cdot u(t) = t^2$$

und

$$y''(x) - 2 \cdot y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}$$

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 9 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 18. Juni, vor der Globalübung. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x),$$

deren rechte Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ stetig und bezüglich $x$ Lipschitzstetig ist. Gegeben sei ferner eine Lösung $\mu : (t^-, \infty) \to \mathbb{R}^N$ dieser Gleichung. Es sei $t_0^* > t^-$ gegeben.

i) Beweise die Gültigkeit folgender alternativen Definition der Stabilität von $\mu$:
Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta^* > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\xi^*$ mit $\|\xi^* - \mu(t_0^*)\| < \delta^*$ die Abschätzung

$$\|\lambda(t; t_0^*, \xi^*) - \mu(t)\| < \varepsilon$$

für alle $t \geq t_0^*$ gilt, so ist die Lösung $\mu$ stabil.

ii) Zeige die Gültigkeit folgender äquivalenten Definition der Attraktivität von $\mu$:
Gibt es ein $\eta^* > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\xi^*$ mit $\|\xi^* - \mu(t_0^*)\| < \eta^*$ die Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} \|\lambda(t; t_0^*, \xi^*) - \mu(t)\| = 0$$

gilt, so ist die Lösung $\mu$ attraktiv.

**Aufgabe 2:** Gegeben sei eine skalare autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einer $n$-mal stetig differenzierbaren rechten Seite $f : D \to \mathbb{R}$ und einer Ruhelage $x_0$. Untersuche die Stabilität dieser Ruhelage in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0)$, wenn folgendes gilt:

$$f^{(k)}(x_0) = 0$$

für $k = 0, \ldots, n-1$ und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

**Aufgabe 3:** Gegeben sie das zweidimensionale lineare System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 - 2\cos(4t) & 2 + 2\sin(4t) \\ -2 + 2\sin(4t) & -1 + 2\cos(4t) \end{pmatrix} \cdot x.$$

Zeige, dass dieses System instabil ist, obwohl seine Koeffizientenmatrix nur Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzt. Erkläre diesen scheinbaren Widerspruch zur Theorie der Stabilität von linearen autonomen Differentialgleichungen.

Hinweis: Dieses System besitzt die Lösung $(e^t \sin(2t), e^t \cos(2t))$.

**Präsenzaufgabe 1:** Bestimme die Jordannormalform und skizziere das Phasenporträt von

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & -1 \end{pmatrix} \cdot x$$

in der Ebene.

**Präsenzaufgabe 2:** Betrachte das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die allgemeine Lösung, die Lösung durch die Anfangswerte

$$v_0^1 = (1, -1, 0)^T, \quad v_0^2 = (0, 1, -1)^T, \quad v_0^3 = (0, 1, 1)^T,$$

bestimme die Stabilität des Nullpunktes und zeichne das Phasenporträt.

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 10 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 25. Juni, vor der Globalübung. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1:** Zeige, dass ein lineares Systems

$$\dot{x} = A(t) \cdot x$$

mit stetiger Koeffizientenmatrix genau dann stabil ist, wenn jede Lösung auf $[0, \infty)$ beschränkt ist. Gilt dies auch für inhomogene lineare Differentialgleichungssysteme?

**Aufgabe 2: Lotka-Volterra-Differentialgleichungen**

Wir modellieren zwei Populationen, die sich in einer Räuber-Beute-Beziehung zueinander verhalten: Die Elchpopulation zum Zeitpunkt $t$ ist $x(t)$, die Wolfpopulation zum Zeitpunkt $t$ ist $y(t)$.

i) Begründe, warum ein sinnvolles Modell für die Dynamik von Elch- und Wolfpopulationen das Lotka-Volterra-System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t) \cdot y(t)\\ \dot{y}(t) &= \gamma x(t) \cdot y(t) - \delta y(t)\end{aligned}$$

ist. Welche Bedeutung tragen die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma$ und $\delta$? Bonusaufgabe: Schätze Werte für die Konstanten (erlaubte Hilfsmittel: intelligentes Googlen[1]).

ii) Überprüfe das triviale Gleichgewicht des Systems auf Stabilität. Tipp: Linearisiertes System betrachten

iii) Finde das nichttriviale Gleichgewicht und wiederhole deine Stabilitätsanalyse. Hier tritt ein Problem auf. Warum?

iv) Wiederhole Aufgaben ii) und iii) für das verallgemeinerte Lotka-Volterra-System: Untersuche das triviale Equilibrium auf Stabilität, zeige, dass es ein nichttriviales Gleichgewicht gibt (falls $\varepsilon < \alpha\delta/\gamma$) und überprüfe, ob dieses Gleichgewicht stabil ist.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t) \cdot y(t) - \varepsilon x(t)^2\\ \dot{y}(t) &= \gamma x(t) \cdot y(t) - \delta y(t) - \kappa y(t)^2\end{aligned}$$

Erläutere außerdem die Bedeutung der zusätzlichen Terme.

v) Bonusaufgabe: Plotte die Lösungen beider Systeme und interpretiere die Dynamik. Informiere dich über das „Attofox Problem“ und diskutiere damit die Anwendbarkeit solcher Systeme in der Praxis.

Fazit: In dieser Aufgabe tritt eine Situation auf, in der unsere aktuelle Maschinerie zur Stabilitätsanalyse noch nicht ausreicht. Wir werden darauf zurückkommen.

**Aufgabe 3:** Bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x + 3 \cdot y\\ \dot{y} &= \dot{x}\\ x(0) = 5, &\quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = 1\end{aligned}$$

[1] z.B.: `http://www.wolf.org/learn/basic-wolf-info/wolf-faqs/#s`

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 11 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 2. Juli, vor der Globalübung. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1: Stabilität skalarer linearer Differentialgleichungen** Es seien $a$ und $b$ stetige Funktionen in $\mathbb{R}$. Bestimme hinreichende und notwendige Kriterien an $a(t)$ und $b(t)$ dafür, dass die skalare lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

asymptotisch stabil ist. Wie lauten die Kriterien im Falle periodischer Funktionen $a$ und $b$?

**Aufgabe 2: Lotka-Volterra-Differentialgleichungen: Teil 2**

Wir modellieren eine Räuber-Beute-Beziehung mittels zweier verschiedener Modelle:

Modell 1:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t) \cdot y(t)\\ \dot{y}(t) &= \delta x(t) \cdot y(t) - \gamma y(t)\end{aligned}$$

Modell 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t) \cdot y(t) - \varepsilon x(t)^2\\ \dot{y}(t) &= \delta x(t) \cdot y(t) - \gamma y(t) - \kappa y(t)^2\end{aligned}$$

Wir zeigen die Stabilität der nichttrivialen Equilibria mit zwei leicht unterschiedlichen Methoden:

i) Zeige, dass die Funktion
$$K(x, y) = x^\gamma \cdot \exp(-\delta x) \cdot y^\alpha \cdot \exp(-\beta y)$$
konstant entlang von Lösungskurven **von Modell 1** ist und bestimme damit, inwiefern das nichttriviale Equilibrium $(x^*, y^*) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ stabil und/oder attraktiv ist.

ii) Zeige, dass
$$V(x, y) = C \cdot (x - x^* - x^* \log \frac{x}{x^*}) + D \cdot (y - y^* - y^* \log \frac{y}{y^*})$$
für passende Parameter $C, D$ eine Lyapunovfunktion für **Modell 2** ist. Beweise damit die asymptotische Attraktivität des Equilibriums
Bemerkung: Hier ist das nichttriviale Equilibrium von Modell 2 gemeint.
Tipp: Interpretiere $\dot{V}$ als eine symmetrische Bilinearform in den Variablen $X = (x - x^*)$ und $Y = (y - y^*)$ und beweise negative Definitheit für geeignete $C, D$ (die du dann konkret wählen musst).
Zweiter Tipp: Vermeide, die konkreten Werte von $x^*$ und $y^*$ einzusetzen. Damit sparst du dir sehr viel Nerven.

**Aufgabe 3:** Bestimme die maximale (lokale) Lösung zu

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \frac{t}{1-t^2} & 1 \\ 0 & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \cdot y$$

zu den Anfangswerten

i) $y(0) = (0, 1)^T$ und

ii) $y(2) = (0, -1/3)^T$.

**Präsenzaufgabe 1:** Benutze das Linearisierungsvefahren, um die Stabilität des nichttrivialen Gleichgewichts beim Lorenzsystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

für $\sigma, r, b > 0$ zu untersuchen.

**Präsenzaufgabe 2:** Gegeben sei eine skalare autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einer $n$-mal stetig differenzierbaren rechten Seite $f : D \to \mathbb{R}$ und einer Ruhelage $x_0$. Untersuche die Stabilität dieser Ruhelage in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0)$, wenn folgendes gilt:

$$f^{(k)}(x_0) = 0$$

für $k = 0, \dots, n-1$ und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

indem du eine Lyapunovfunktion findest.

**Präsenzaufgabe 3:** Bestimme die Stabilität des linearen Systems

$$\dot{x} = Ax$$

für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 12 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 9. Juli, vor der Globalübung. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

### Aufgabe 1: Mathematisches Pendel mit Reibung

Die Bewegungsgleichung eines Pendels mit Reibung ist gegeben durch

$$\ddot{x} + c\dot{x} + b\sin(x) = 0,$$

wobei $b, c > 0$ Konstanten und $x$ der Winkel des Fadens zur Senkrechten ist.

i) Leite das zugehörige System erster Ordnung ($y = \dot{x}$) her.

ii) Bestimme, für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\gamma c x^2 + \gamma xy + \frac{1}{2}y^2 + b(1-\cos x)$$

eine Lyapunovfunktion in einer Umgebung des Nullpunktes ist.

iii) Für welche $\gamma$ liefert $V$ eine Aussage über die asymptotische Stabilität der trivialen Ruhelage?

**Aufgabe 2:** Bestimme das Matrixexponential $\exp(At)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mithilfe des Putzeralgorithmus'.

**Aufgabe 3:** Betrachte ein hamiltonsches System mit Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2\right)$$

i) Leite die Bewegungsgleichungen her und löse sie. Beschreibe die Dynamik und zeige, dass alle Lösungskurven periodisch sind.

ii) Finde eine Funktion

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (q_1,p_1,q_2,p_2) &\mapsto \pi(q_1,p_1,q_2,p_2) \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, dass falls $\|(q_1,p_1,q_2,p_2)\|_{\mathbb{R}^4} = C$ gilt, auch $\|\pi(q_1,p_1,q_2,p_2)\|_{\mathbb{R}^3} = C$ ist.

iii) Finde (abgesehen vom Hamiltonian) *Integrale* der Dynamik, also Funktionen $f_i(q_1,p_1,q_2,p_2)$, die auf Lösungskurven konstant sind.

Tipp: Man spart sich viel Rechenaufwand und Nerven, wenn man statt der vierdimensionalen Dynamik eine zweidimensionale Dynamik im Komplexen ansetzt, also $z_1(t) = q_1(t) + i \cdot p_1(t)$.

Universität Augsburg University

**Evgeny Volkov**
**Philipp Düren**

# Blatt 13 zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Abgabe Donnerstag, 16. Juli, vor der Globalübung. Die Abgabe muss mit Namen und Übungsgruppenzugehörigkeit beschriftet sein.

**Aufgabe 1: Jacobi-Identität** Weise nach, dass für die Poissonklammer gilt, dass

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

**Aufgabe 2:** Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ eine global definierte Hamiltonfunktion mit $H(z) \to \infty$, wenn $\|z\| \to \infty$. Zeige, dass dann alle Lösungen von

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i} H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

beschränkt sind.

**Dieses Blatt ist vergleichsweise sehr kurz! Nutze die verbleibende Zeit am Besten damit, alte Übungsblätter zu lösen!**

**Präsenzaufgabe 1:** Betrachte die Pendelgleichung

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$$

i) Zeige, dass $2I = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + (1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + 2\sin^2(\theta/2)$ ein Integral ist.

ii) Zeichne das Phasenporträt

**Präsenzaufgabe 2: Zweikörperproblem mit verschwindendem Drehmoment** Betrachte ein Objekt in einem (gravitationellen) Potential $V(q) = -G/\|q\|^2$, also mit Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2m} - \frac{G}{\|q\|}.$$

Wir betrachten ausschließlich den Fall, in dem das Drehmoment den Wert 0 hat, also sind die Variablen $q$ und $p$ skalar (weil der „Raum der Dynamik“ einen eindimensionalen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ bildet).

Leite die Bewegungsgleichungen her, und benutze die Tatsache, dass Lösungen auf Niveaumengen der Hamiltonfunktion existieren, um einen Ausdruck für die Lösung der Differentialgleichung zu erhalten. Höre auf, sobald die Terme zu hässlich werden, die Lösung ist nämlich nicht in geschlossener Form darstellbar.