Hausaufgaben

Abgabe **(zu zweit)** der Übungsaufgaben am nächsten Tutorium. Schreiben Sie bitte auf Ihre (zusammengehefteten) Aufgabenblätter Ihre Namen und Ihre Übungsgruppennummer.

H 1.1 Sei Ω eine Menge. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega \colon A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra ist.

H 1.2 Zeigen Sie: Für jede endliche σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\#\mathcal{A} = 2^m$.

Hinweis: Betrachten Sie $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} \colon \nexists B \in \mathcal{A} \text{ mit } \emptyset \subsetneq B \subsetneq A\}$.

H 1.3 Sei Ω eine Menge und $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf Ω.

1. Ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ immer eine σ-Algebra?
2. Ist $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ immer eine σ-Algebra?

   Hinweis: Wenden Sie Aufgabe T1.4 an: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten Sie $B_n = \{2n\}$ und $\bigcup B_n$.

H 1.4 Es sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{A}$ auf Ω. Zeigen Sie, dass für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt:

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.
2. $\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

H 1.5 Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ heißt *Dynkin-System*, wenn gilt

a) $\emptyset \in \mathcal{D}$.

b) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$.

c) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt, so ist auch $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie: Ist $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Dynkin-Systemen, so ist auch $\mathcal{D} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_i$ ein Dynkin-System. (Man kann also zu jedem Mengen-System $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ das erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{C}) := \bigcap \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega) \colon \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkin-System}, \mathcal{C} \subset \mathcal{D}\}$ assoziieren.)

Tutoraufgaben

T 1.1 Bestimmen Sie explizit alle σ-Algebren auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

T 1.2 Sei Ω eine Menge. Bestimmen Sie die von $\{\{x\} : x \in \Omega\}$ erzeugte σ-Algebra.

T 1.3 Zeigen Sie:

$$\mathcal{A} := \{B \subset \mathbb{N} : \#B < \infty \text{ oder } \#B^c < \infty\}$$

ist ein Ring aber keine σ-Algebra.

T 1.4 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Mengensystem

$$\mathcal{A}_n := \{B \subset \mathbb{N} : B \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\}) \text{ oder } B^c \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\})\}$$

eine σ-Algebra.

T 1.5 Zeigen Sie, dass keine unendliche, abzählbare σ-Algebra existiert. Sie dürfen ohne Beweis anwenden, dass $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\#\mathbb{N}} > \aleph_0 := \#\mathbb{N}$.

Hausaufgaben

H 2.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Setze $|M| = \operatorname{diam}(M) := \sup\{|x-y|: x,\ y \in M\}$. Eine Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ von M mit $|A_i| < \delta$ heißt *δ-Überdeckung von M*. Für $\delta > 0$ beliebig definieren wir:

$$\mu_\delta^*(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^n : (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } A\right\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mu^*(A) := \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta^*(A) = \sup_{\delta>0} \mu_\delta^*(A)$$

ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

H 2.2 Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie:

1. Ist $M \subset \Omega$ beliebig, so ist $\mathcal{A}_M = \{A \cap M : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf M.
2. Ist $M \in \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A}_M = \{A \in \mathcal{A} : A \subset M\}$.
3. Ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $M \in \mathcal{A}$, so ist die *Einschränkung* $\mu\lfloor M$

   $$(\mu\lfloor M)(A) := \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}_M$$

   ein Maß auf $\mathcal{A}_M$.

H 2.3 Es sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen.

i. μ ist ein Prämaß.

ii. Für alle $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A) \qquad (\textit{Stetigkeit von unten}).$$

iii. Für alle $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = A$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A) \qquad (\textit{Stetigkeit von oben}).$$

iv. Für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \emptyset$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0 \qquad (\emptyset\textit{-Stetigkeit}).$$

Zeigen Sie:

1. Es gelten die 5 Implikationen: $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$. Für $(i) \Leftrightarrow (ii)$ siehe T2.1.
2. Ist μ endlich, so gilt auch: $(ii) \Leftarrow (iii)$.

Tutoraufgaben

T 2.1 Zeigen Sie, dass $(i) \Leftrightarrow (ii)$ in Aufgabe H2.3

T 2.2 Sei Ω eine Menge. Wir definieren eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ als

$$\mu(A) := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß (das sogenannte *Zählmaß*) ist. Wann ist es σ-endlich?

T 2.3 Sei $\mathcal{F}$ der Ring der Figuren auf $\mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass es genau einen Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ gibt, so dass

   $$\mu([a,b)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a < 0 \leq b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gilt.

2. Ist μ ein Prämaß?

Hausaufgaben

H 3.1 *Completion of a measure.* Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measure space. Show:

a) The family

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N \colon A \in \mathcal{A} \text{ and } \exists\, B \in \mathcal{A} \text{ with } N \subset B \text{ and } \mu(B) = 0\}$$

is a σ-algebra which contains $\mathcal{A}$.

b) The measure μ may be extended uniquely to all of $\overline{\mathcal{A}}$ as

$$\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A).$$

H 3.2 Let $n > m$ be two natural numbers and $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-m}$. Let $\mathcal{B}^n$ denote the Borel σ-algebra in $\mathbb{R}^n$. Show:

$$\mathcal{B}^n \lfloor (\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}\}) = \{A \times \{\mathbf{0}\} \colon A \in \mathcal{B}^m\},$$

where $\mathcal{B}^n \lfloor M$ denotes the trace σalgebra of $\mathcal{B}^n$ over $M \subset \mathbb{R}^n$.

H 3.3 *The Devil's staircase.* Let $A_{k,i}$ be the intervals used in the definition of the Cantor set in the lectures. Recall that they have length 3^{-k}. Let $U := \bigcup_{k,i} A_{k,i}$. Show:

a) The map $f \colon U \to [0, 1]$, $x \mapsto \frac{2\,i-1}{2^k}$ for $x \in A_{k,i}$ can be extended in a unique way to a monotone function $f \colon [0, 1] \to [0, 1]$. This map is called *the Devil's staircase* (*Teufelstreppe*).

b) f is continuous.

c) $\lambda(f(C)) = 1$.

Tutoraufgaben

T 3.1 Let $\mathcal{A}$ be a σ-algebra over a set Ω and assume there is $x_0 \in \Omega$ such that $\{x_0\} \in \mathcal{A}$. Show that

$$(\Omega, \mathcal{A}, \delta_{x_0}) \text{ is a complete measure space} \Leftrightarrow \mathcal{A} = P(\Omega).$$

T 3.2 Let Ω be any set, equipped with the discrete metric. Determine the σ-algebras generated by:

1. The family $\mathcal{O}$ of open sets.

2. The family $\mathcal{K}$ of compact sets.

T 3.3 *Generalized Cantor sets.* Fix $0 < r < 1$ arbitrarily and consider the following construction in the unit interval $[0, 1]$:

Step 1. Remove a centered interval of length r from $[0, 1]$.

Step k. In each of the remaining intervals, remove a centered interval of relative length r.

Let C_r be the set obtained in the limit $r \to \infty$.

a) Prove that $[0, 1] \backslash C_r$ is a union of open intervals whose length adds up to 1.

b) Compute explicitly: $\lambda(C_r) = 0$. **Hint:** Show that the set after stage k has length $(1 - r)^k$.

T 3.4 *Two properties of the Cantor set.* Let $C = C_{1/3}$ be the Cantor set. Show that:

a) Every $x \in C = \overline{C}$ is an accumulation point (*Häufungspunkt*) of C (a closed set with no isolated points is called a *perfect set*).

b) No $x \in C$ is an inner point of C (a set whose closure has empty interior is called *nowhere dense*).

Hausaufgaben

H 4.1 Let $M \subset \mathbb{R}^n$ be Lebesgue-measurable. Show:

a) For every $\varepsilon > 0$ there exists an open set $U \supseteq M$ such that $\lambda(U \setminus M) < \varepsilon$.

b) For every $\varepsilon > 0$ there exists a closed set $F \subseteq M$ such that $\lambda(M \setminus F) < \varepsilon$.

Note: The following facts are not part of the exercise but are very useful. Let $M \subset \mathbb{R}^n$ be *arbitrary*, then:

a) If for every $\varepsilon > 0$ there exists an open set $U \supseteq M$ such that $\lambda^*(U \setminus M) < \varepsilon$, then M is measurable.

b) If for every $\varepsilon > 0$ there exists a closed set $F \subseteq M$ such that $\lambda^*(M \setminus F) < \varepsilon$, then M is measurable.

H 4.2 Let f, g, f_1, f_2, ... be $\mathcal{L}$–$\overline{\mathcal{B}}$ measurable. Prove the following statements from Proposition 3.7 of the lecture notes:

iii. f^+ is measurable.

v. $\max\{f, g\}$ is measurable.

xiii. $\lim_{k \to \infty} f_k$ is measurable.

H 4.3 In this exercise you will build a Lebesgue measurable but not Borel measurable set. Incidentally, we show that homeomorphisms need not be $\mathcal{L}$–$\mathcal{L}$ measurable. To this end, prove the following statements:

a) Let f be the Cantor function defined in exercise H3.3 (Devil's staircase). The following map is a homeomorphism:

$$g\colon [0,1] \to [0,1], \quad g(x) = \frac{f(x) + x}{2}.$$

b) Every set $M \subset \mathbb{R}$ with positive outer measure $\lambda^*(M) > 0$ contains a non-measurable subset $W \subset M$. **Hint:** Consider the Vitali set constructed in the lectures. Show first that every measurable subset A of $q + V$ with $q \in \mathbb{Q}$ is a nullset. Conclude from this that there exists $q \in \mathbb{Q}$ such that $W = (q + V) \cap M$.

c) Let C be the Cantor set and g the map defined above. There exists a non-measurable set $W \subset g(C)$, the preimage $g^{-1}(W)$ is Lebesgue measurable but not Borel measurable and g^{-1} is not $\mathcal{L}$–$\mathcal{L}$ measurable.

Tutoraufgaben

T 4.1 In this exercise you will show that the Lebesgue measure has no *atoms* (smallest measurable sets with positive measure): let $M \subset \mathbb{R}$ have positive, finite Lebesgue measure. Then there exists a measurable subset A of M with $0 < \lambda(A) < \lambda(M)$.

Hint: Fix $0 < m < \lambda(M)$ and define a partition of $\mathbb{R}$ with intervals of length m. Intersect this partition with M and use monotonicity and aditivity.

T 4.2 Prove that every monotone function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is measurable.

T 4.3 Let $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ be measurable and not almost everywhere equal to $+\infty$. Show that there exists a set of positive measure where f is bounded.

T 4.4 Find a function f such that $|f|$ is measurable but f itself isn't.

T 4.5 For every $\alpha \in [0, 1]$ define $f_\alpha\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ such that f_α is measurable but $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$ isn't.

T 4.6 Let $(\Omega, \mathcal{A})$ be a measurable space and $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ a map. Complete the proof of Corollary 3.5 in the lecture notes showing the equivalence of the following statements:

i. f is $\mathcal{A}$–$\overline{\mathcal{B}}$ measurable.

ii. $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ for every $a \in \mathbb{Q}$ (then automatically $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{A}$ for every $a \in \mathbb{Q}$).

iii. $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ for every $a \in \mathbb{Q}$ (then automatically $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$ for every $a \in \mathbb{Q}$).

Hausaufgaben

H 5.1 Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x\,y$. Berechnen Sie $\int_{[0,1]^2} f\,\mathrm{d}(x,y)$.

H 5.2 Beweisen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar ist.

H 5.3 Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f, g $\mathcal{A}$-messbare Funktionen mit $f \geq g$ μ-f.ü. Zeigen Sie: Ist $\int_\Omega f - g\,\mathrm{d}\mu = 0$, so muss $f = g$ μ-f.ü. sein.

H 5.4 Jede Riemann-integrierbare Funktion auf einem kompaktem Intervall ist Lebesgue-integrierbar und ihr Riemann-Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein.

Hinweis: Wenden Sie T5.5 an.

H 5.5 *Eine Charakterisierung der Riemann-integrierbaren Funktionen (**freiwillige Aufgabe**).* Für die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktion auf einem kompaktem Intervall $[a,b]$ gilt:

$$\mathcal{R}[a,b] = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon f \text{ ist beschränkt und fast überall stetig}\}.$$

Anmerkung: In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass Lebesgue-integrierbare Funktionen sogar überall unstetig sein dürfen.

Hinweis:

1. Um "$\supset$" zu zeigen, überlegen Sie sich zunächst, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge offener Intervalle $((a_i,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\{x \in [a,b]\colon f \text{ bei } x \text{ nicht stetig}\} \subset \bigcup_i (a_i,b_i)$ und $\sum_i \lambda((a_i,b_i)) < \varepsilon$. Finden Sie dann eine Überdeckung von $[a,b] \setminus \bigcup_i (a_i,b_i)$ mit Intervallen (a_i', b_i'), $i \in I$, so dass die Werte von f auf jedem dieser Intervalle ε-nahe beieinander liegen.

2. Für "$\subset$" ist es hilfreich, den sogenannten *Stetigkeitsmodul*

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{|y-x|<\delta} |f(y) - f(x)|$$

zu betrachten. Es gilt $\omega_f(x) = 0$ genau dann, wenn f bei x stetig ist. Versuchen Sie zu zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge $N_k := \{x \in [a,b]\colon \omega_f(x) > k^{-1}\}$ eine Nullmenge ist.

Tutoraufgaben

T 5.1 Sei

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass f (uneigentlich) Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

T 5.2 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit f messbar. Zeigen Sie:

1. Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig so folgt aus $f = g$ f.ü., dass g messbar ist.
2. Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nicht vollständig so stimmt obige Aussage nicht.

T 5.3 Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \min\{f(x), n\} \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

T 5.4 Für $x \in [0, 1]$ sei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x = \infty.$$

T 5.5 Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ nicht negativ und messbar. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu \colon \varphi \text{ einfach und } \varphi \leqslant f \right\}.$$

Hausaufgaben

H 6.1 Show that the conclusion of Fatou's lemma does not hold in general for f_n integrable but possibly negative.

H 6.2 Let f be bounded and measurable on a finite interval $[a, b]$ and let $\varepsilon > 0$. Prove that there exist:

1. a step function ψ such that $\int_a^b |f-\psi| < \varepsilon$,
2. a continuous function g with compact support such that $\int_a^b |f-g| < \varepsilon$.

Now let $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ be integrable. Show that for every $\varepsilon > 0$ there exists a continuous function g with compact support and such that $\int |f-g| < \varepsilon$.

H 6.3 Prove that

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x/n)^n \, x^{1/n}} \, \mathrm{d}x = 1.$$

H 6.4 Let $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ be an integrable function. Show that $\lim_{h\to 0} \int |f(x+h) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0$.

Tutoraufgaben

T 6.1 Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of integrable functions such that $\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|\,\mathrm{d}x < \infty$. Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converges a.e., its sum f is integrable and

$$\int f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,\mathrm{d}x.$$

T 6.2 Compute

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x.$$

T 6.3 Let $a_{m,n}\geqslant 0$ for all $m,n\in\mathbb{N}$. Show that

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

T 6.4 Show that

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{\infty}\frac{n^2\,x\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

for $a>0$, but not for $a=0$.

Hausaufgaben

H 7.1 Let P_n be the n-dimensional simplex, i.e. the convex Hull of $(0, e_1, \ldots, e_n)$:

$$P_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \text{ with } \lambda_i \in [0,1] \text{ and } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant 1\}.$$

Compute the volume of P_n.

Hint: Consider the cuts $P_n \cap \{x_n = \xi\}$ at fixed height ξ and write them as a function of the $n-1$ dimensional simplex P_{n-1}. Use Fubini's theorem to express $\mathrm{vol}(P_n)$ as a function of $\mathrm{vol}(P_{n-1})$, then finish by induction.

H 7.2 *Cavalieri's principle*. For any set $M \subset \mathbb{R}^n$, denote by M_{x_1} the *slice at* x_1, that is the set $M_{x_1} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, x') \in M\}$. Show that any two sets $A, B \in \mathcal{B}^n$ have equal measure if $\lambda^{n-1}(A_{x_1}) = \lambda^{n-1}(B_{x_1})$ for all $x_1 \in \mathbb{R}$.

H 7.3 Let $f: [a, b] \to [0, \infty)$ be continuous on a finite interval. Show that the *solid of revolution* $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x_1 \leqslant b \text{ and } x_2^2 + x_3^2 \leqslant f(x_1)^2\}$ has volume

$$\lambda(A) = \pi \int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

H 7.4 Let

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t, \quad x \in (0, \infty)$$

be the Gamma function. Show that $\Gamma \in C^\infty(0, \infty)$.

Hint: In order to simplify the problem, show that it is enough to take $x \in (0,1)$ by using that $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ (you may use this last equality without proving it). Then remember to split the integral. For one of the bounds you can use that $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t^n / n!$ for $t \geqslant 0$ (why?). For another you will have to prove that $\log(t)^n / t^\alpha$ is integrable in $(0,1)$ for $\alpha \in (0,1)$.

H 7.5 Let $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be integrable and define

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mathrm{e}^{-2\pi i x \xi} \, \mathrm{d}x.$$

Show that $\hat{f}$ is well defined and that $\hat{f}(\xi) \to 0$ as $|\xi| \to \infty$.

Hint: Write $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x - \xi')] \, \mathrm{e}^{-2\pi i x \xi} \, \mathrm{d}x$ where $\xi' = \frac{1}{2} \frac{\xi}{|\xi|^2}$.

Tutoraufgaben

T 7.1 Let $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $\varphi(x) := \lfloor x \rfloor$.

a) What's the pushforward (*Bildmaß*) of Lebesgue measure by φ?

b) Compute

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}\varphi(\lambda)(x).$$

T 7.2 Let $a_k \to a$ and $\sigma_k \to 0$ in $\mathbb{R}$. Define

$$\mathcal{N}(x|a_k, \sigma_k^2) := \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a_k)^2}{\sigma_k^2} \right) \mathrm{d}x.$$

Show that for any continuous and bounded function φ one has

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, \mathcal{N}(x|a_k, \sigma_k^2) \, \mathrm{d}x \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \varphi(a).$$

T 7.3 Let $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ be measurable. Show:

$$\int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{|f| > t\}) \, \mathrm{d}t.$$

Note: This suggests that one way to estimate an integral is to control the measure of the level sets $\{|f| > t\}$. Another conclusion is that one can write any non-negative function as a "sum" of characteristic functions:

$$f = \int_0^\infty \chi_{\{f > t\}} \, \mathrm{d}t.$$

Finally, the same method proves that the L^p norm can be written as:

$$\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{|f| > t\}) \, \mathrm{d}t.$$

T 7.4 Compute the area of the ellipse $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leqslant 16\}$.

Hausaufgaben

H 8.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Menge, die vom Zylinder $\{x^2 + y^2 = 1\}$, der Ebene $\{z = 0\}$ und dem Kegel $\left\{z = (x^2 + y^2)^{1/2}\right\}$ eingeschlossen wird. Berechnen Sie

$$\int_M z \, \mathrm{d}(x, y, z).$$

H 8.2 Sei μ ein endliches Maß auf einer Menge Ω und $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\|f\|_p \longrightarrow \|f\|_\infty \text{ für } p \to \infty.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{|f| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ positives Maß hat (warum?).

H 8.3 Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha(x) = |x|^\alpha, x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(B_1^{(n)})$ genau dann, wenn $\alpha > -n/p$.

2. $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n \backslash B_1^{(n)})$ genau dann, wenn $\alpha < -n/p$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis anwenden, dass die Transformation in n-dimensionalen Polarkoordinaten durch ein Diffeomorphismus φ_n: $(0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist, mit $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \times \ldots \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so dass $|\det D\varphi_n(r, \omega)| = r^{n-1} \, \Phi_n(\omega)$ gilt, wobei Φ_n eine auf Ω integrierbare Funktion ist, mit $\int_\Omega \Phi_n(\omega) \, \mathrm{d}\omega = n \, \lambda^n(B_1^{(n)})$.

H 8.4 Sei $\mathbb{T}$ der 3-dimensionale Torus mit Radii $r < R$. Leiten Sie die Parametrisierung rigoros her, die durch die Formel

$$(x, y, z) = \varphi(r, u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

gegeben ist, und berechnen Sie $\mathrm{vol}(\mathbb{T})$ (mit Begründung!).

Tutoraufgaben

T 8.1 Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}.$$

T 8.2 Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Volumen des von der Basisvektoren erzeugten Spat gerade

$$|\det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^n|^{1/2}$$

ist.

T 8.3 Seien $1 \leqslant p < p' \leqslant \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Hausaufgaben

H 9.1 Sei

$$f_\alpha(x) := \frac{\mathrm{e}^{-x^2/\alpha}}{\sqrt{\pi\,\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Bestimmen Sie $f_a * f_b$ für $a, b > 0$,

H 9.2 Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f(x) := \mathrm{e}^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

H 9.3 Beweisen Sie Aussagen *(iii)*, *(iv)* und *(v)* vom Satz 4.19 im Skript.

H 9.4 *Wärmeleitung.* Sei

$$\phi(t,x) := \frac{1}{(4\,\pi\,t)^{n/2}}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/4t} \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

i. Sei $t_k \to 0$. Zeigen Sie, dass $\phi(t_k, \cdot)$ eine Dirac-Folge ist.

ii. Seien $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $u(t,x) := (\phi(t,\cdot) * g)(x)$. Begründen Sie:

$$u(t,x) \xrightarrow[t \to 0]{} g(x) \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n).$$

iii. Berechnen Sie

$$\partial_t\, u - \Delta_x\, u \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Notation. *Hier bezeichnet Δ_x den Laplace Operator bezüglich der x-Koordinaten: $\Delta_x\, u(t,x) := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2\, u(t,x)$.*

Tutoraufgaben

T 9.1 Sei $R>0$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $\chi_{(-R,R)}$.

T 9.2 Zeigen Sie, dass $C_b(\mathbb{R}^n)$ nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

T 9.3 Sei $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leqslant x^2+4\,y^2\leqslant 4\}$. Berechnen Sie

$$\int_M \mathrm{e}^{-x^2-4y^2}\,\mathrm{d}(x,y).$$

T 9.4 Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^\top A\,x)\,\mathrm{d}x.$$

Hausaufgaben

H 10.1 Es sei die *Kofaktormatrix* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$(\operatorname{cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

definiert, wobei A_{ij} die Matrix ist, die aus A entsteht wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte von A streicht.

1. Zeigen Sie, dass die Ableitung von det: $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ an der Matrix A, gerade die lineare Abbildung ist, die durch die Matrix $\operatorname{cof} A$ dargestellt wird.

2. Zeigen Sie, dass die spezielle Lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \colon \det A = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

H 10.2 Seien M_1, M_2 zwei Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_2}$, mit Dimensionen d_1 und d_2. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ist. Welche Dimension hat sie?

H 10.3 *Heisenbergsche Unschärferelation.* Es sei ψ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit ψ, $\hat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ und $\|\psi\|_2 = 1$, so dass auch die Abbildungen

$$x \mapsto x_j \psi(x) \quad \text{und} \quad \xi \mapsto \xi_j \hat{\psi}(\xi), \quad j = 1, \ldots, n,$$

in $L^1 \cap L^2$ liegen. Setze

$$\bar{x} := \int x |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \quad \bar{\xi} := \int \xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi,$$

sowie

$$V(|\psi|^2) := \int (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \quad V(|\hat{\psi}|^2) := \int (\xi - \bar{\xi})^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

Zeigen Sie, dass dann $V(|\psi|^2) \cdot V(|\hat{\psi}|^2) \geq n^2/4$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\psi = \partial_j (x_j \psi) - x_j \partial_j \psi$ gilt und folgern Sie daraus $\int |\psi|^2 = \int \bar{\psi} \partial_j (x_j \psi) - \int \bar{\psi} x_j \partial_j \psi = -\int x_j \psi \partial_j \bar{\psi} - \int x_j \bar{\psi} \partial_j \psi$. Schließen Sie daraus mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung $n^4/4 \leq \int x^2 |\psi(x)|^2 \int \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2$. Dies zeigt die Behauptung für $\bar{x} = \bar{\xi} = 0$. Den allgemeinen Fall erhält man daraus, indem man zu gegebenem ψ die Funktion $\psi_{\bar{x}, \bar{\xi}}(x) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\xi}x} \psi(x + \bar{x})$ betrachtet.

Anmerkung: Dies ist die (bzw. eine) Heisenbergsche Unschärferelation der Quantenmechanik. Ein quantenmechanisches Teilchen (zu einer bestimmten Zeit) wird durch solch eine „Wellenfunktion" ψ mit $n = 3$ beschrieben. $|\psi|^2$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Raum beschreibt. Genauer: Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einer Ortsmessung in $A \subset \mathbb{R}^n$ zu finden ist $\int_A |\psi|^2$. Genauso beschreibt $|\hat{\psi}|$ die Impulsverteilung des Teilchens. Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt dann, dass Ort und Impuls nicht gleichzeitig scharf *definiert* sein können: Je kleiner die Streuung (Varianz) bei der Messung des eines Aspektes ist, desto größer muss sie bei der Messung des anderen sein. Achtung! Dabei ist nicht „scharf gemessen" gemeint: dies ist als eine fundamentale Eigenschaft der Natur genommen und entspricht weder einer technischen Schwierigkeit, noch der Tatsache, dass Messungen eine Wechselwirkung mit dem gemessenen Objekt benötigen.

Tutoraufgaben

T 10.1 Zeigen Sie, dass die Menge M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie deren Dimension.

1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$.
2. $M = \{(u + v, v, u^2 + 2\, u\, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

T 10.2 Zeigen Sie, dass der Rand eines Dreieckes keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

T 10.3 *Rotationsflächen im* $\mathbb{R}^3$. Es seien I ein offenes Intervall und $r: I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

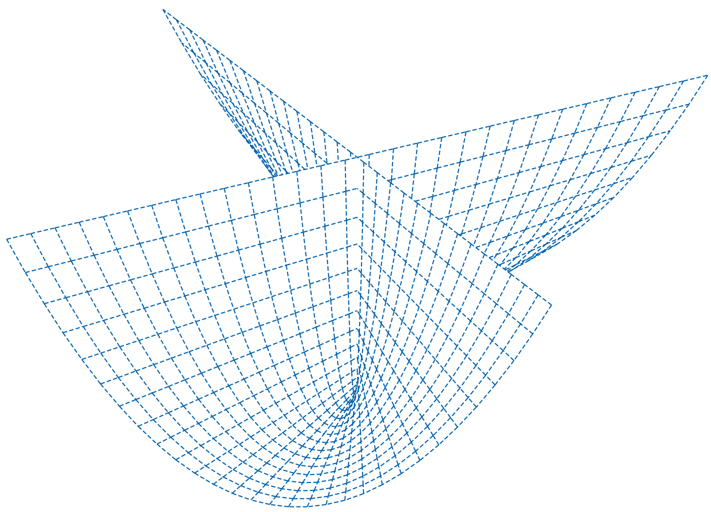
$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = r(z)^2\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

T 10.4 *Der Whitney'sche Regenschirm.* Sei

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z\, y^2 = 0, z \geqslant 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $M := W \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, aber W selbst nicht.



Hausaufgaben

H 11.1 Let $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

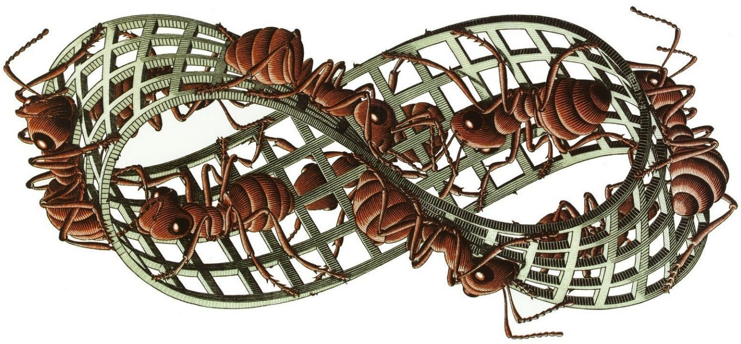
1. Draw M and show that it is a two-dimensional manifold by giving explicit parametrizations.

2. Compute the tangent and normal spaces at any point $p \in M$.

H 11.2 *Möbius strip.* Let $\phi: V := \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$ be defined as

$$\phi(s,t) := \left((1 + t\cos\frac{s}{2})\cos s, (1 + t\cos\frac{s}{2})\sin s, t\sin\frac{s}{2}\right).$$

Show that $M = \phi(V)$ is a two-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^3$ and compute its tangent and normal spaces. Use any graphing software to plot the figure.



M.C. Escher. *Möbius Strip II*, 1963 *(www.mcescher.com)*.

H 11.3 Let $f: M \to N$ be a differentiable map between C^α manifolds of dimensions m, n in $\mathbb{R}^d$. We define its *differential at a point* $p \in M$ as the map

$$d_p f: T_p(M) \to T_{f(p)}N, \quad v = \alpha'(0) \mapsto (f \circ \alpha)'(0),$$

where $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ is a differentiable curve with $\alpha(0) = p$. Show that $d_p f$ is well defined and that it is a linear map.

H 11.4 Let $V = \mathring{V} \subset \mathbb{R}^n$ and $f \in C^\alpha(V; \mathbb{R})$. Prove that the graph of f is a manifold and compute its tangent and normal spaces at any given point $p = (x, f(x)), x \in V$.

Tutoraufgaben

T 11.1 Let $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

1. Draw M and show that it is a two-dimensional manifold by giving explicit parametrizations.

2. Compute the tangent and normal spaces at any point $p \in M$.

T 11.2 Let $f(x,\ y,\ z) = z^2$. Show that 0 is not a regular value of f although $f^{-1}\{0\}$ is a submanifold of dimension 2 of $\mathbb{R}^3$.

T 11.3 Let M, M' be two C^α-submanifolds of $\mathbb{R}^n$ and let $k \leqslant \alpha$. We say that a map $f : M \to M'$ is C^k-differentiable at a point $p \in M$ if for any local charts $\varphi : V \to U$ with $p \in U$ and $\varphi' : V' \to U'$ with $f(p) \in U'$ the composition

$$\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi$$

is differentiable at $\varphi^{-1}(p)$. One says that $f \in C^k(M; M')$ if it is C^k-differentiable at every point $p \in M$. Show that this is well defined, i.e. that it doesn't depend on the choice of charts.

Hausaufgaben

H 12.1 Zu $a, b \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das *Vektorprodukt* als $a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie, dass $a \times b$ senkrecht auf a und auch auf b steht.

2. Es seien nun $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, $V \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi: V \to M$ eine Parametrisierung und g die Gramsche Determinante von Φ. Zeigen Sie: Für $x \in V$ gilt $g(x) = |\partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x)|^2$.

H 12.2 Seien a, b, $c \in \mathbb{R}^3$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Vektorprodukts in H12.1:

1. Bilinearität: $(\lambda\, a + \mu\, b) \times c = \lambda\, a \times c + \mu\, b \times c$ und $a \times (\lambda\, b + \mu\, c) = \lambda\, a \times b + \mu\, a \times c$.

2. Antikommutativität: $a \times b = -b \times a$.

3. Für das sogenannte *Spatprodukt* $(a \times b) \cdot c$ gilt $(a \times b) \cdot c = \det\,(a, b, c)$. Insbesondere dürfen die Einträge zyklisch vertauscht werden: $(a \times b) \cdot c = (c \times a) \cdot b$ und es gilt die Formel $\det\,(a \times b, a, b) = |a \times b|^2$.

4. $\det \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ a \cdot b & b \cdot b \end{pmatrix} = |a \times b|^2$.

H 12.3 Wir betrachten die Abbildung Φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi) \mapsto (\mathrm{e}^r \cos \varphi, \mathrm{e}^r \sin \varphi, \varphi)$ und die Bildmenge $W := \Phi(\mathbb{R}^2)$.

1. Zeigen Sie, dass $\Phi: \mathbb{R}^2 \to W$ ein Homöomorphismus ist und bestimmen Sie Φ^{-1}.

2. Folgern Sie, dass W eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und geben Sie einen Atlas für W an.

Weiter sei nun $\rho \in \mathbb{R}$.

3. Berechnen Sie die Länge der Kurve γ_ρ: $[0, 2\,\pi] \to W$, $\tau \mapsto \Phi(\rho, \tau)$. Was passiert im Grenzwert $\rho \to -\infty$?

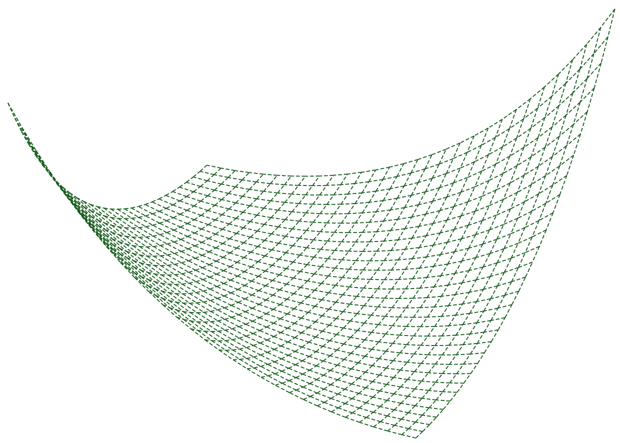
4. Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $A_\rho := \Phi((-\infty, \rho) \times (0, 2\,\pi))$.

H 12.4 Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|}\, \mathrm{d}x$.

Tutoraufgaben

T 12.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche der Graphen folgender Funktionen $f: V \to \mathbb{R}$:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
2. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x + y)$, $V = (-1, 1)^2$.



T 12.2 Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie (vgl. Blatt 8):

1. $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(B_1^{(n)})$ genau dann, wenn $\alpha > -n/p$.
2. $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n \backslash B_1^{(n)})$ genau dann, wenn $\alpha < -n/p$.

T 12.3 Berechnen Sie die Länge folgender Kurven:

1. $\alpha(t) := \begin{cases} (2\cos t, 2\sin t, t), & t \in [0, 2\pi], \\ (2, t - 2\pi, t), & t \in (2\pi, 4\pi]. \end{cases}$
2. $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t), t \in [0, 2\pi]$.

Hausaufgaben

H 13.1 Es sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, $k \geqslant 1$. Dann ist laut Satz 5.9 durch $\{\partial_1\Phi(a), ..., \partial_k\Phi(a)\}$, $a := \Phi^{-1}(p)$, eine Basis von T_pM gegeben, wobei Φ eine innere Karte von M ist, deren Bild den Punkt p enthält.

Zeigen Sie: Wenn M orientierbar und $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas von M ist, so ist die durch obige Basis gegebene Orientierung des Tangentialraumes T_pM unabhängig von der speziellen Wahl von $\Phi \in \mathcal{A}$.

H 13.2 Zeigen Sie, dass das Möbiusband *nicht orientierbar* ist.

H 13.3 Zeigen Sie, dass

$$M := \overline{B}_1((-1,0)) \cup [-1,1]^2 \cup \overline{B}_1((1,0))$$

eine glatt berandete Menge in $\mathbb{R}^2$ ist, wobei $B_1(x) := \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\}$.

Tutoraufgaben

T 13.1 Berechnen Sie die äußere Normalenfelder von:

1. $\Omega = B_1^{(n)}(0)$.
2. $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant z\}$.
3. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant f(x)\}$ wobei $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\, x^2, x \in \mathbb{R}$.

T 13.2 Seien $M = \mathbb{R}^2$, $\Omega = B_1(0)$. Finden sie einen zum Rand von Ω adaptierten Atlas von M.

Tutoraufgaben

T 14.1 Berechnen Sie:

$$\int_{\partial B_1(0)} \begin{pmatrix} x^2 + y\sin z \\ y \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}S.$$

T 14.2 *Greensche Formeln.* Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Omega \subset U$ kompakt, glatt berandet mit äußerem Einheitsnormalenfeld ν. Zeigen Sie:

a) Für $u \in C^2(U)$ gilt $\int_\Omega \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x)\,\mathrm{d}S(x)$.

b) Für $u, v \in C^2(U)$ gilt

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}S(x) - \int_\Omega v(x)\,\Delta u(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) Für $u, v \in C^2(U)$ gilt

$$\int_\Omega u(x)\,\Delta v(x) - v(x)\,\Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\,\partial_\nu v(x) - v(x)\,\partial_\nu u(x)\,\mathrm{d}S(x).$$

Hierbei bezeichnet $\partial_\nu g(x)$ die Richtungsableitung von $g \in C^1(U)$ bei $x \in \partial\Omega$ in Richtung $\nu(x)$.

T 14.3 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $n \geqslant 2$, $0 \notin \partial\Omega$, mit äußerem Einheitsnormalenfeld ν sowie $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := \frac{x}{|x|^n}$. Zeigen Sie: Es gilt

$$\int_{\partial\Omega} f(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}S(x) = \begin{cases} \mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) & \text{für } 0 \in \Omega, \\ 0 & \text{für } 0 \notin \Omega, \end{cases}$$

wobei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ die *Einheitssphäre* in $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

Tutoraufgaben

T 15.1 Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ und $\Omega \subset M$ gegeben durch

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\} \quad \text{und} \quad \Omega = M \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

1. Zeigen Sie, dass M eine orientierte zweidimensionale C^2-Mannigfaltigkeit ist und berechnen Sie das Normalenfeld ν mit positiver dritter Komponente.

2. Zeigen Sie, dass Ω eine glatt berandete Teilmenge von M ist und berechnen Sie für jedes $p \in \partial\Omega$ den Tangenteneinheitsvektor $\tau(p)$, der die von ν induzierte Orientierung auf $T_p\,\partial\Omega$ definiert.

3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial\Omega} f(x,y,z)\,\tau(x,y,z)\,\mathrm{d}S(x,y,z)$$

für die Funktion $f(x,y,z) := (y,z,x)$

a) direkt,

b) mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes.

T 15.2 Die Stetigkeitsbedingung an F im Satz von Gauß ist notwendig. Dazu betrachten Sie

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_i > 0, |x| < 1\} \text{ und } f(x) = \frac{x}{|x|^2}, x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}, f(0) = 0.$$

T 15.3 *Das Archimedische Prinzip:* «Die Auftriebskraft in einer Flüssigkeit der Dichte ρ is gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge». Dazu seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) = (0,0,-\rho z)$, $\rho \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$-\int_{\partial\Omega} f\nu\,\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{Vol}_3(\Omega).$$

Anmerkung: Es ist experimentell leicht nachzuweisen, dass das Archimedische Prinzip nicht immer gilt, und zwar in dem Fall wo der Körper den Rand des Behälters berührt. Beispielsweise ist die vorhergesagte Kraft falsch, falls eine Seite eines vollständig untergetauchten Zylinders in Kontakt mit dem Boden des Behälters ist. Solange keine Flüssigkeit zwischen den beiden fließt wirkt die Kraft *nach unten* anstatt nach oben (s. z.B. Boris M Valiyov et al. *Do fluids always push up objects immersed in them?* Physics Education vol. 35, pp. 284, 2000). Für eine mathematische Herleitung des Prinzips in dem Fall inhomogener Füssigkeiten, siehe F. M. S. Lima, *Using surface integrals for checking the Archimedes' law of buoyancy*, European Journal of Physics, vol. 33, no. 1, pp. 101–113, Jan. 2012.

T 15.4 Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch in einer Umgebung von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω glatt und zusammenhängend. Zeigen Sie: Ist $\partial_\nu u \geqslant 0$ auf $\partial\Omega$, so ist u konstant.

Hinweis: Wenden sie die Greensche Formeln an.