Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 1

Dieses Blatt dient dazu, die schon aus Analysis 1 bekannten Resultate über das Riemann-Integral zu wiederholen. Georg Friedrich Bernhard Riemann war ein deutscher Mathematiker. Seinen Namen fügt man vor Integral nicht nur wegen der Würdigung seines Werkes hinzu. Es gibt nämlich auch andere Definitionen der Integrierbarkeit. So kennt man wenigstens noch Darboux-, Stieltjes- und Lebesgue-Integral. Das erste ist dem Riemann-Integral gleichwertig, nur die Vorgehensweisen unterscheiden sich. Beim zweiten und dritten handelt es sich um Erweiterungen dieses Konzeptes. So ist z.B. die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ aus der Aufgabe H4 Lebesgue-integrierbar, obwohl sie nicht Riemann-integrierbar ist. Das Lebesgue-Integral ist weiterhin sehr wichtig, da es schöne Eigenschaften bei Grenzwertübergängen besitzt.

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, 8. April 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L.

H1. Zeigen Sie anhand der folgenden Schritte, dass jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

(a) Wiederholen Sie, was für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

vom Intervall $[a, b]$ ist.

(b) Definieren Sie zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ gemäß der äquidistanten Unterteilung, so dass $\varphi \geq f \geq \psi$ sein wird. Treffen Sie hier die natürlichste Wahl, indem Sie die Monotonie von f berücksichtigen.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, dx$ und $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\, dx$.

(d) Führen Sie den Beweis mittels Lemma 7.8 zu Ende.

H2. Es sei $f \in R[a, b]$ und $(Z^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge der Unterteilungen des Intervalls $[a, b]$, wobei

$$Z^{(j)} : a = x_0^{(j)} < x_1^{(j)} < \ldots < x_{n_j}^{(j)} = b.$$

Zeigen Sie Folgendes: Gilt für die zugehörigen Feinheiten

$$\lim_{j\to\infty} \mu(Z^{(j)}) = 0,$$

so konvergieren beliebige entsprechende Riemann'sche Summen gegen das Riemann-Integral, d.h. für jede Wahl der Stützstellen $\xi_k^{(j)} \in [x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)}]$, $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n_j\}$ ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{j\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n_j} f(\xi_k^{(j)})(x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)}) \right).$$

Dabei dürfen Sie die nicht bewiesene Bemerkung nach Satz 7.15 verwenden.

H3. Berechnen Sie mithilfe der Riemann'schen Summen die Integrale

$$\int_0^2 x^3\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin x\, dx.$$

Für das erste könnte die Summe in Z1 auf dem zweiten Übungsblatt zur Analysis 1 nützlich sein. Beim zweiten dürfen Sie die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} = \cot \frac{\pi}{2n}$$

ohne Beweis anwenden.

H4. Die charakteristische Funktion einer beliebigen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$ ist.

(b) Leiten Sie her, dass die Thomae'sche Funktion auf jedem kompakten Intervall Riemann-integrierbar ist. (Sie wurde auf dem zehnten Übungsblatt zur Analysis 1 definiert.)

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 2


Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (auch der Fundamentalsatz der Analysis) ist, wie schon der Name besagt, eines der wichtigsten Resultate der Analysis und der Mathematik insgesamt. Er wurde im 17. Jahrhundert von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz entdeckt. Einen Schatten auf beide Wissenschaftler wirft deren unerbittlicher Kampf um den Primat bei diesem Resultat, der für Jahre auch die Beziehungen zwischen englischen und deutschen Mathematikern vergiftet hat. Heutzutage gilt, dass beide diesen Satz selbst hergeleitet haben. Dabei ist Newton früher zu den entscheidenden Resultaten gekommen, Leibniz hat ihn aber im Jahre 1684 als Erster veröffentlicht. Bei beiden war die Formulierung aus heutiger Sicht eher seltsam, da die festen Grundlagen der Analysis deutlich später gelegt wurden.

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (9.–11. April) gemeinsam gelöst.

T1. Sei $s > 0$. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^s + 2^s + \ldots + n^s}{n^{s+1}}.$$

T2. (a) Es sei F eine Stammfunktion von f und $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

(b) Berechnen Sie

- $\displaystyle\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{3}\right)\, dx,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\, dx,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{3-x}\, dx,$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx.$

T3. Berechnen Sie die folgenden (un)bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^0 \arcsin x\, dx,$

(b) $\displaystyle\int x \cdot 7^{x^2}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{-x^2+8x+3}{x^3+x^2-2}\, dx,$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx.$

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 15. April 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Es seien $0 < a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine positive und stetige Funktion. Definiere auf $[a,b]$ die Funktionen

$$F(x) := \int_a^x f(t)\; dt \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x tf(t)\; dt.$$

Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine stetige Funktion $H : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in (a,b]$ gilt: $H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$.

(b) Die Funktion H ist eine streng monoton fallende Funktion.

H2. Sei $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ eine stetige Funktion. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\tfrac{1}{n}\right) f\left(\tfrac{2}{n}\right) \dots f\left(\tfrac{n}{n}\right)}.$$

H3. Berechnen Sie die folgenden (un)bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\; dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\; dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cosh x + \sinh x + 2}$.

H4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

(b) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f' Riemann-integrierbar.

Zusätzliche Aufgaben

Die Antworten zu diesen Aufgaben werden sich auf dem Übungsblatt 3 befinden.

Z1. Berechnen Sie die nachstehenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \arctan x\; dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{8x^3+7x^2+19x+9}{4x^3+9x}\; dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\; dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\; dx$,

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2^x}{1-4^x}\; dx$,

(f) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2\; dx$.

Z2. Sei $0 < a < b$ und es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b x f(x)\, dx = 0.$$

Beweisen Sie, dass f wenigstens zwei Nullstellen in (a, b) hat.

Z3. Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x > 0$ ist der Mittelwert von f im Intervall $[0, x]$ gleich $f(x)$.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

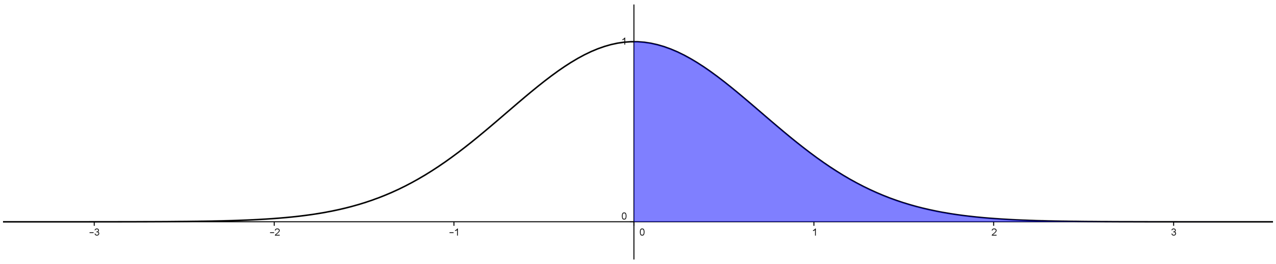
im Sommersemester 2014

Übungsblatt 3

Die Funktion $x \mapsto \exp(-x^2)$ spielt eine spezielle Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie und in der Statistik, da sie mit der Normalverteilung verbunden ist. Deren Graph heißt wegen der Form auch die Gauß'sche Glockenkurve. Weil sie stetig ist, ist sie Riemann-integrierbar auf allen kompakten Intervallen. Die Stammfunktion, in der normalisierten Form als die Fehlerfunktion erf bekannt, lässt sich aber nicht mit elementaren Funktionen darstellen. Die Fläche unter dem Graphen der Glockenkurve hat endlichen Inhalt im Sinne des uneigentlichen Integrals, weil

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Es ist nicht schwierig, dies zu zeigen, man braucht aber Doppelintegrale. Deswegen dürfen Sie dieses Resultat in H3 ohne Beweis verwenden.

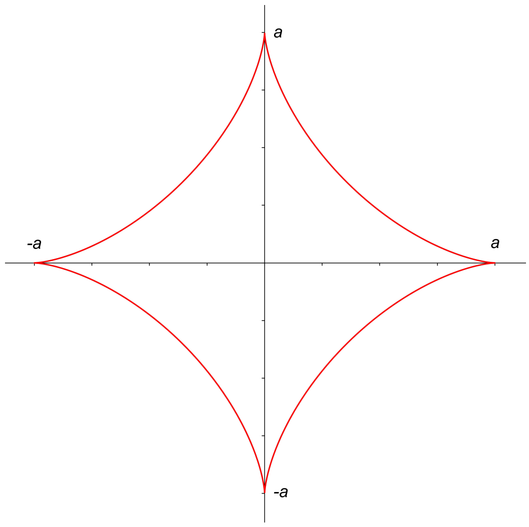


Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (23.–25. April) gemeinsam gelöst.

T1. Berechnen Sie die Länge einer Astroide (auch Sternkurve). Sie ist gegeben als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die für gegebenes $a > 0$ erfüllen:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$



T2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $x + y = 3$.

T3. Untersuchen Sie die nachstehenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und, falls vorhanden, berechnen Sie deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx$,

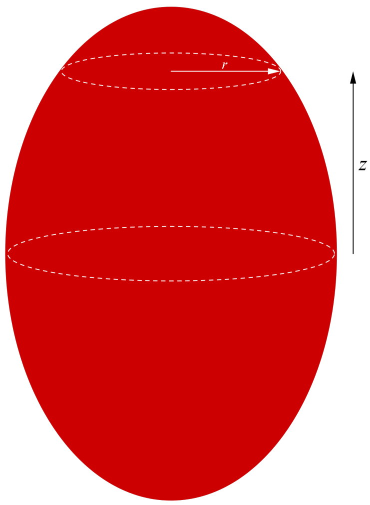
(b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2-4}\,dx$.

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 29. April 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche eines Ostereies mit Höhe 56 mm und Durchmesser 42 mm. Dabei approximieren wir dessen Form durch ein Ellipsoid, d.h., der Radius r bei der Höhe z (gemessen von der Mitte) erfüllt:

$$\left(\frac{r}{21}\right)^2+\left(\frac{z}{28}\right)^2=1.$$



H2. Welche der folgenden Integrale konvergieren?

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,dx$.

Bei (b) zeigen Sie zuerst, dass $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}=1$ ist.

H3. Geben Sie das Integral

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2}\,dx$$

für jedes $p>-1$ mit der Euler'schen Gamma-Funktion wieder. Berechnen Sie diesen Wert für $p=2$, 5 und 8.

H4. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir die äquidistante Unterteilung $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, bezeichnen die zugehörige Riemann'sche Summe mit beliebig gewählten Stützpunkten durch

$$R_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \quad \text{und definieren noch} \quad T_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

(a) Zeichnen Sie für $f(x) = x^2$, wie durch R_4 und T_4 die Fläche unter dem Graphen approxomiert wird.

(b) Beweisen Sie: Gilt für jedes $x \in (0,1)$

- $|f'(x)| \leq M$, so folgt $\left| R_n - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \frac{M}{n}$.
- $|f''(x)| \leq M$, so folgt $\left| T_n - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \frac{M}{12n^2}$.

Antworten zum Übungsblatt 2

Z1. (a) $x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

(b) $2x + \frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3} + \log|x| + \frac{3}{8}\log(4x^2+9) + C$

(c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2$

(d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\log(1+\sqrt{x}) + C$

(e) $\frac{\log 9 - \log 5}{\log 4}$

(f) $e - 2$

Z2. Eine Nullstelle folgt unmittelbar aus dem Mittelwertsatz. Die Existenz noch einer kann durch Widerspruch hergeleitet werden.

Z3. Das erfüllen genau alle konstanten Funktionen.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

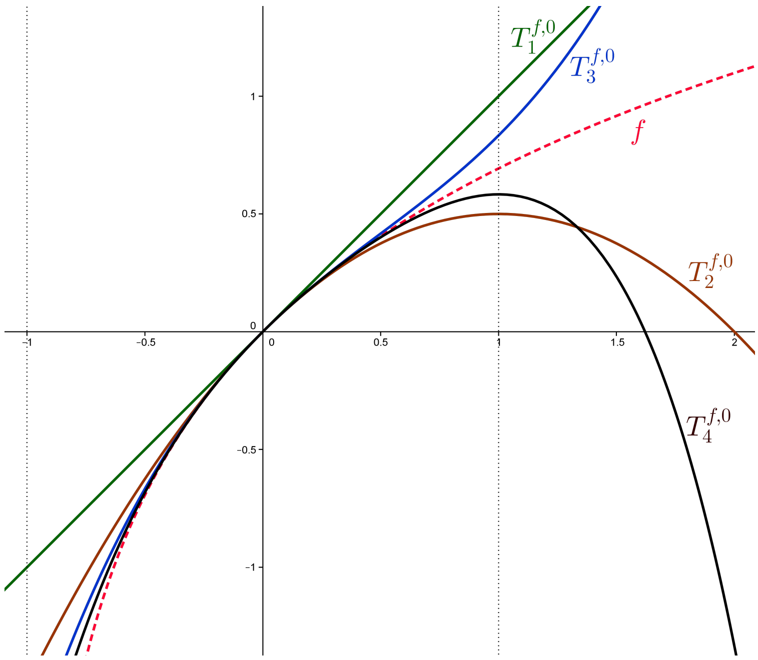
Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 4

Die Taylorpolynome bzw. -reihen sind die Erweiterung der linearen Approximation. In der Nähe eines Punktes kann man Werte einer Funktion (nicht besonders geschickt) mit dem Wert in diesem Punkt einschätzen. Das ist das nullte Taylorpolynom. Schon bekannt ist auch die Approximation durch die Tangente (das erste Taylorpolynom), was die Idee hinter der Ableitung ist. So geht es weiter; das zweite ist die Parabel, die sich am besten dem Graphen angleicht usw. Außerdem erhält man eine Abschätzung des Restgliedes.



Auf dem Bild sind $f(x) = \log(1+x)$ und $T_1^{f,0}, \dots, T_4^{f,0}$ zu sehen. Die Taylorreihe konvergiert für $(-1, 1]$ gegen f.

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (am 30. April und 2. Mai) gemeinsam gelöst.

T1. Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

(a) Berechnen Sie $\|f_n\|_\infty$.

(b) Beweisen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert (auf $\mathbb{R}$).

T2. Bestimmen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe bei 0 der Funktion

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + x)^\alpha.$$

Berechnen Sie den Näherungswert für $\sqrt[5]{1{,}1}$ mit dem zweiten Taylorpolynom und bestimmen Sie die Anzahl der richtigen Dezimalstellen.

T3. Geben Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen an:

(a) e^{2x+1} bei -1,

(b) $\frac{1}{3-x}$ bei 1.

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 6. Mai 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Es sei $f : (0,1) \to (0,1)$ eine beliebige stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(x) < x$ für alle $x \in (0,1)$. Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : (0,1) \to (0,1)$ als Verkettung

$$f_n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{mal}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f_n \to 0$ punktweise.

(b) Ist die obige Konvergenz immer auch gleichmäßig (auf $(0,1)$)?

H2. (a) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x-8)^n}{\log \log n}$$

konvergiert. Ist die somit definierte Funktion stetig?

(b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{7x+1}{2x^2+x-1}$$

die Taylorreihe bei 1, wo sie konvergiert und $f^{(2014)}(1)$.

H3. Leiten Sie her, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist und alle ihre Ableitungen im Nullpunkt verschwinden. Zeigen Sie zunächst, dass für $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2},$$

p_n ein geeignetes Polynom, ist.

H4. (a) Es sei $1 \leq p < q < \infty$. Geben Sie eine Folge von Funktionen $f_n \in R[0,1]$ an, so dass $f_n \to 0$ im p-ten Mittel, jedoch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im q-ten Mittel nicht konvergiert.

(b) Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $R[0,1]$, die für jedes $p \in [1,\infty)$ im p-ten Mittel gegen 0 konvergiert, jedoch nicht gleichmäßig.

In beiden Fällen können Sie das Beispiel unter der Folgen der Form $f_n = c_n \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ finden.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

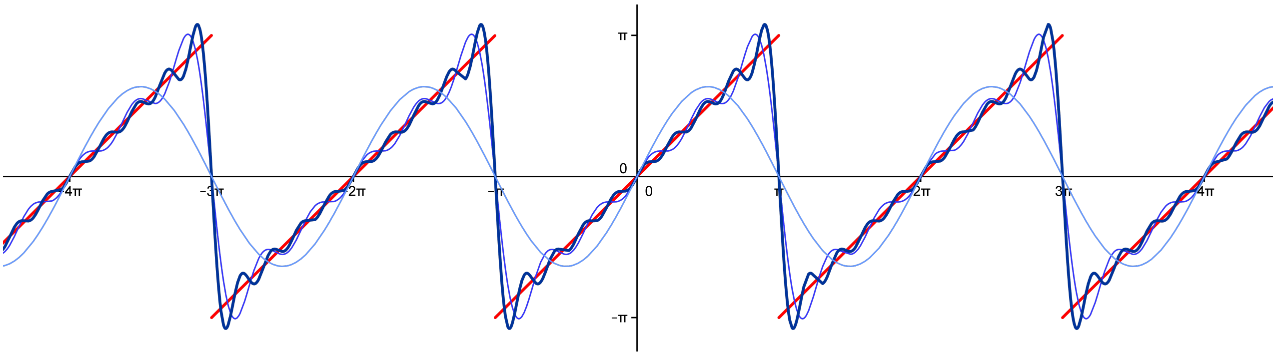
Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 5

Auf dem Bild unten ist die Sägezahnkurve aus H1 (rot) mit deren erstem, fünftem und neuntem Fourier-Polynom (immer dunkler blau) dargestellt. Auf $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ ist die Funktion differenzierbar. Da konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen den Funktionswert. In den Sprungstellen existieren zumindest beide einseitigen Ableitungen. In solchen Punkten konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion, in diesem Falle also gegen 0.



Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (7.–9. Mai) gemeinsam gelöst.

T1. (a) Überzeugen Sie sich, dass der Hauptsatz der Analysis auch für komplexwertige Funktionen gilt: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $c \in [a, b]$. Dann ist die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_c^x f(t)\, dt,$$

differenzierbar und $F' = (\operatorname{Re} F)' + i(\operatorname{Im} F)' = f$.

(b) Zeigen Sie für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $\displaystyle\int_a^b e^{\lambda x}\, dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_a^b$.

T2. Sei f die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \pi, \\ -1, & \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

(b) Welche Zahlenreihe wird bestimmt durch das Einsetzten von $x = \frac{\pi}{3}$?

(c) Was ergibt die Parseval'sche Gleichung?

T3. Sei $f \in R_{\text{per}}$ eine reelle Funktion.

(a) Bestimmen Sie die Formeln für die Koeffizienten deren reeller Fourierreihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

(b) Zeigen Sie, dass bei ungeraden Funktionen $a_0 = 0$ ist. Ist f gerade, so ist $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\ dx$. Was gilt in diesen zwei Fällen für die anderen Koeffizienten? Wie sieht die reelle Fourierreihe aus?

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 13. Mai 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Entwickeln Sie die Sägezahnkurve in ihre reelle Fourierreihe und berechnen Sie die Summe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

H2. Sei $f \in R_{\text{per}}$ stetig mit Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Definiere

$$F(x) := \int_0^x \big(f(x) - c_0\big)\ dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass auch $F \in R_{\text{per}}$.

Bezeichne die Fourier-Koeffizienten von F mit $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

(b) Leiten Sie (mithilfe der partiellen Integration) her, dass $C_k = \frac{c_k}{ik}$ für $k \neq 0$ gilt.

(c) Beweisen Sie $C_0 = -\sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik}$.

H3. Sei $a \notin \mathbb{Z}$ beliebig und f sei die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = \cos(a\pi - a|x|)$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f. Dabei kann die Formel für das Produkt zweier Kosinus hilfreich sein:

$$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

(b) Leiten Sie die folgende Gleichung her:

$$\cot \pi a = \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 - k^2} \right) = \frac{a}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 - k^2}.$$

H4. Sei für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos(n^2 x).$$

Zeigen Sie Folgendes:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist damit wohldefiniert und die Reihe konvergiert gleichmäßig (auf ganz $\mathbb{R}$).

(b) f ist unendlich oft differenzierbar und die Ableitungen erhält man durch das gliedweise Ableiten der Reihe.

(c) Die Taylorreihe bei 0 konvergiert nur für $x = 0$.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

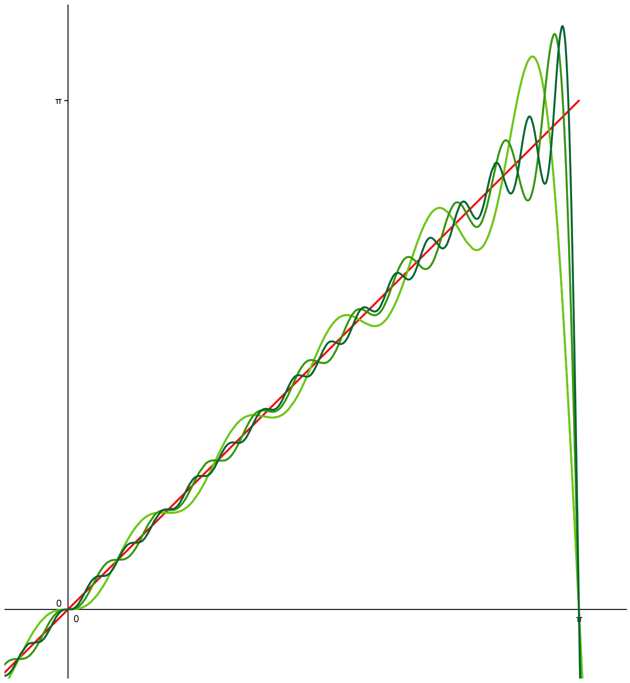
im Sommersemester 2014

Übungsblatt 6

Die Sägezahnkurve aus H1 des fünften und dieses Blattes ist hier in der Umgebung der Sprungstelle bei π mit ihrem zehnten, zwanzig- und dreistigsten Fourier-Polynom (immer dunkler grün) gezeichnet. Immer näher zur Sprungstelle nehmen die Fourier-Polynomen auch einen Wert an, der wesentlich größer vom linksseitgen Grenzwert der Funktion ist. (Auf der anderen Seite passiert Ähnliches.) Das ist das Gibbs'sche Phänomen und kommt bei allen Funktionen mit Sprungstellen vor. Ist h die Höhe des Sprunges bei x_0, so konvergiert für $n \to \infty$

$$\left|(S_n f)(x_0 \pm \tfrac{\pi}{n}) - f(x_0\pm)\right| \to h \cdot 0{,}08949\ldots$$

Die Zahl rechts heißt auch die Wilbraham-Gibbs-Konstante und besagt, dass die Abweichungen mindestens 8,95% der Höhe betragen. Sie wird in H1 hergeleitet.



Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (14.–16. Mai) gemeinsam gelöst.

T1. Es sei $M = (0, +\infty)$ und

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

(b) Berechnen Sie die Abstände $d(\frac{1}{3}, 1)$, $d(2,4)$ und $d(1000, 10)$.

T2. $C^1[a,b]$ bezeichnet die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$.

(a) Zeigen Sie, dass $C^1[a,b]$ ein reeller Vektorraum ist.

(b) Überprüfen Sie, dass durch

$$\|f\| := |f(a)| + \|f'\|_\infty$$

eine Norm definiert ist.

(c) Bilden die Funktionen, deren Wert in b gleich 1 ist, einen Untervektorraum?

T3. Sei $\mathbb{R}^2$ mit einer p-Norm versehen. Skizzieren Sie $\overline{B}_1\big((0,0)\big)$, d.h. die abgeschlossene Einheitskugel mit Mittelpunkt im Ursprung, falls $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ oder ∞.

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 20. Mai 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Sei f die durch die Sägezahnkurve gegebene Funktion. Ihre reelle Fourierreihe ist, wie bereits berechnet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

(a) Zeigen Sie

$$(S_n f)(\pi - \tfrac{\pi}{n}) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

(b) Leiten Sie her, dass

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(\pi - \tfrac{\pi}{n}) = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 3{,}7038741.$$

Den Näherungswert müssen Sie nicht selbst berechnen, sie können ihn aber mit einem Programm bestimmen.

(c) Bestimmen Sie die Wilbraham-Gibbs-Konstante aus der Einleitung.

H2. Sei $f \in C[a,b]$ und es gelte $\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\int_a^b p(x) f(x)\, dx = 0$ für jedes Polynom p ist.

(b) Leiten Sie mittels des Weierstraß-Approximationssatzes her, dass $\int_a^b f(x)^2\, dx = 0$.

(c) Was folgt daraus?

H3. Für die Elemente der Menge $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ definieren wir

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := \left|\log \frac{x_1}{x_2}\right| + \left|\log \frac{y_1}{y_2}\right|.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf M ist.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die offene Kugel mit Mittelpunkt $(1,1)$ und Radius 1 bezüglich d.

H4. Sei Σ eine beliebige endliche Menge. Sie sei das Alphabet, deren Elemente die Buchstaben und geordnete n-Tupel der Buchstaben nennen wir die Wörter der Länge n oder die n-buchstabigen Wörter. Der Hamming-Abstand zwischen Wörtern gleicher Länge ist die Anzahl der Stellen mit verschiedenen Buchstaben. Ist Σ das deutsche Alphabet und betrachten wir die vierbuchstabigen Wörter, so ist z.B.

$$d(\text{Bier}, \text{Tier}) = 1, \ d(\text{Bier}, \text{Wein}) = 4, \ d(\text{Zwei}, \text{Drei}) = 2 \quad \text{und} \quad d(\text{Eins}, \text{Vier}) = 3.$$

(a) Beweisen Sie, dass für beliebiges Alphabet Σ und $n \in \mathbb{N}$ der Hamming-Abstand eine Metrik auf der Menge aller n-buchstabigen Wörter ist.

(b) Schreiben Sie die explizite Formel für den Hamming-Abstand, falls $\Sigma = \{0, 1\}$ und $n = 8$, also für den metrischen Raum aller Bytes.

(c) Wie viele Bytes liegen in der offenen bzw. abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 10101010 und Radius 2?

(d) Welche Bytes haben Abstand 8 zu 10010111.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 7

Ein metrischer Raum (M, d) muss immer als ein Paar aus einer Menge und einer Metrik gesehen werden. Die Metrik bestimmt, ob eine Teilmenge offen, abgeschlossen oder beschränkt ist, was ihr Inneres, Abschluss und Rand sind, ob der Raum vollständig ist usw. Entsprechendes gilt für einen normierten Raum $(X, \|.\|)$, worauf die Aufgaben T3 und H4 hinweisen. Dort gibt es beide Male den Vektorraum $C[0, 1]$, allerdings erstens mit der 1- und zweitens mit der ∞-Norm. Erzeugen die Normen die gleichen Eigenschaften des Raums, so nennt man sie äquivalent. Auf $C[0, 1]$ existieren also nichtäquivalente Normen. In den euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ kommt das aber nicht vor. Dort (und fast nur dort) sind, wie in der Vorlesung auch bewiesen werden wird, alle Normen äquivalent. (Nicht aber alle Metriken!)

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (21.–23. Mai) gemeinsam gelöst.

T1. Es seien (M, d) ein metrischer Raum, $U \subset M$ und $x \in M$. Zeigen Sie Folgendes:

(a) $U^\circ = M \setminus (\overline{M \setminus U})$,

(b) $x \in \overline{U} \iff \operatorname{dist}(x, U) = 0$.

T2. Sei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen und bestimmen Sie deren Innere, Ränder und Abschlüsse. Sind sie offen, abgeschlossen, beschränkt?

- $A = (0, 2] \times [-1, 1)$,
- $B = \{(n, \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$,
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1,\ 0 < y < 2x\}$,
- $D = \mathbb{Z} \times (-1, 1)$.
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
- $F = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1]$.

T3. Sei $C[0, 1]$ mit 1-Norm versehen, d.h. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $f_n(x) = \min\{nx, 1\}$ gegen die Konstante 1 konvergiert. Liegt diese Konstante im Inneren der Menge $P := \{f \in C[0, 1] : f \text{ positiv}\}$?

(b) Beweisen Sie, dass $g_n(x) = \max\{0, \min\{1, 2nx - n + 1\}\}$ eine Cauchyfolge ist, die allerdings nicht konvergiert. Welche Aussage über $(C[0, 1], \|.\|_1)$ folgt daraus?

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 27. Mai 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Sei (M, d) ein beliebiger metrischer Raum. Zeigen Sie Folgendes:

(a) Ist $A \subset B \subset M$, so ist auch $A^\circ \subset B^\circ$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Für beliebige $A, B \subset M$ gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(c) Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, |.|)$. Folgern Sie daraus Gegenbeispiele zu den analogen Aussagen für Ränder bei (a) und für Innere bei (b).

H2. (a) Zeigen Sie die Behauptungen der Definition und Lemma 4.9.

(b) Man kann auf $\mathbb{K}^n$ auch die Produktmetrik einführen, also diesen Raum als Produktraum $(\mathbb{K}, |.|) \times \ldots \times (\mathbb{K}, |.|)$ betrachten. Welche Metrik ist das?

H3. Sei X der Vektorraum aller reellen Polynome mit Grad höchstens 2 und sei

$$\|p\| := |p(-1)| + |p(0)| + |p(1)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|.\|$ eine Norm auf X ist.

(b) Bestimmen das Innere, den Abschluss und den Rand der Menge

$$A := \{p \in X : 0 < p(1) \leq 1\}.$$

(c) Ist X ein Banachraum?

H4. Sei $C[0, 1]$ (im Gegensatz zu T3) mit Supremumsnorm versehen und es seien P und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in T3.

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist und dass P offen ist.

(b) Bestimmen Sie den Abstand der Funktionen $g(x) = \sin \pi x$ und $h(x) = \cos \pi x$ zu

$$U := \{u \in C[0, 1] : u(0) < u(1)\}.$$

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

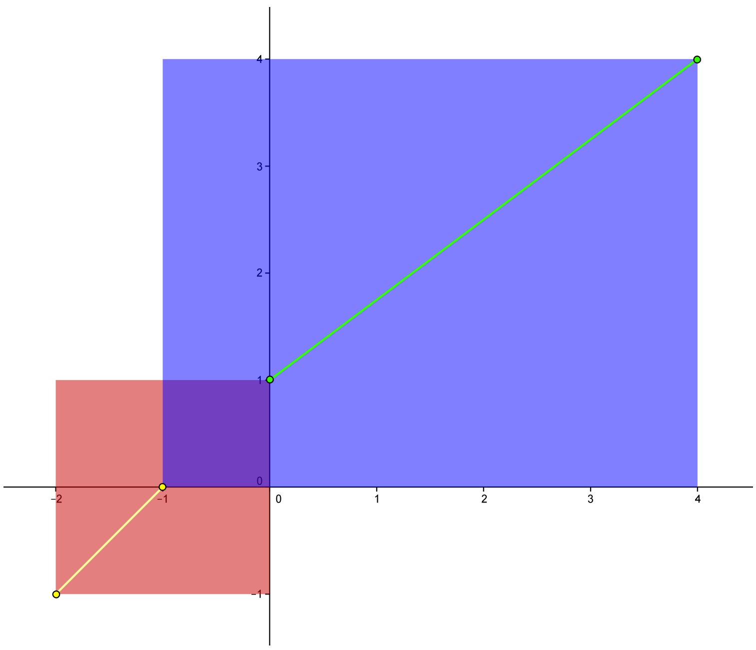
Übungsblatt 8

Bezeichne $\mathcal{K}$ die Menge aller kompakten nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Weil diese Mengen beschränkt sind, ist deren *Hausdorff-Abstand*

$$d_H(A,B) := \max\left\{\sup_{a\in A} \operatorname{dist}(a,B),\ \sup_{b\in B} \operatorname{dist}(b,A)\right\}.$$

wohldefiniert. Die dadurch eingeführte Hausdorff-Metrik misst, wie verschieden diese zwei Mengen sind.

Auf dem Bild sind die Rechtecke $A := [-2,0] \times [-1,1]$ (rot) und $B := [-1,4] \times [0,4]$ (blau) dargestellt. Die Ecke links unten hat von den Elementen aus A den größten Abstand zu B. Das erste Supremum ist so $\sqrt{2}$ (die gelbe Strecke). Umgekehrt gilt für die Ecke rechts oben von B. Deren Abstand zu A beträgt 5 (die grüne Strecke). Also ist für diese zwei Mengen $d_H(A,B) = 5$.



In T3 und H4 wird bewiesen, dass d_H in der Tat eine Metrik ist, mit der $\mathcal{K}$ sogar vollständig wird. Die gleichen Aussagen gelten im beliebigen $\mathbb{R}^n$.

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (28. und 30. Mai) gemeinsam gelöst.

T1. Zeigen Sie Folgendes:

(a) Die Menge

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

ist kompakt in $\mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Norm).

(b) In $(C[-5,3], \|.\|_\infty)$ ist die Menge

$$B := \left\{ f \in C[-5,3] : f(-4) > 3, \int_{-5}^{3} f(x)\, dx < 1907 \right\}$$

offen.

T2. Mit ℓ^∞ wird die Menge aller beschränkten und mit c aller konvergenten reellen Folgen bezeichnet.

(a) Gilt $\ell^\infty = B(D, \mathbb{K})$ für geeignete D und $\mathbb{K}$? Was folgt daraus?

(b) Zeigen Sie, dass c ein abgeschlossener Untervektorraum in ℓ^∞ ist. Ist es ein Banachraum?

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$L : c \to \mathbb{R}, \quad L(\boldsymbol{a}) := \lim_{n\to\infty} a_n,$$

wobei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, linear und stetig ist.

T3. Es sei $\mathcal{K}$ wie in der Einleitung.

(a) Bestimmen Sie $d_H(A,B)$ für

$$A := [0,2] \times [0,1] \quad \text{und} \quad B := \overline{B}_1\big((0,0)\big).$$

(b) Leiten Sie her, dass für beliebige kompakte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ gilt

$$d_H(A,B) = 0 \iff A = B.$$

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 3. Juni 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Sei der Vektorraum aller glatten Funktionen auf $[0,1]$, bezeichnet durch

$$C^\infty[0,1] := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k[0,1],$$

mit der Supremumsnorm versehen.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ konvergent ist.

(b) Leiten Sie her, dass die Abbildung $A : C^\infty[0,1] \to C^\infty[0,1]$, $A(f) := f'$, nicht stetig ist.

H2. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Teilmengen von $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$:

(a) $A := \big\{ f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x)^2 \le f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \big\}$ ist abgeschlossen, jedoch nicht kompakt,

(b) $B := \left\{ f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} f(x)\, dx > 4 \right\}$ ist offen.

H3. Es bezeichne c_0 die Menge aller reellen Nullfolgen und sei für beliebiges $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$

$$A(\boldsymbol{a}) := \left(\tfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) Leiten Sie her, dass c_0 ein abgeschlossener Untervektorraum von c ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\boldsymbol{a}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus ℓ^∞, wobei

$$\boldsymbol{a}^k := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, 0, \ldots),$$

keine konvergente Teilfolge enthält. Ist $\overline{B}_1(\boldsymbol{0})$ in ℓ^∞ kompakt?

(c) Beweisen Sie, dass durch die obige Vorschrift eine stetige lineare Abbildung $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ definiert ist.

(d) Wo liegt das Bild von c und von c_0 unter der Abbildung A?

(e) Bestimmen Sie die Fixpunkte von A, d.h. alle $\boldsymbol{a} \in \ell^\infty$ mit $A(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$.

H4. Es sei $(\mathcal{K}, d_H)$ wie in der Einleitung.

(a) Überprüfen Sie die noch fehlenden Bedingungen dafür, dass d_H eine Metrik ist.

(b) ❄ Leiten Sie her, dass jede fallende Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{K}$, d.h. $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, gegen $\bigcap_{n=1}^\infty K_n$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie anhand der folgenden Schritte, dass $(\mathcal{K}, d_H)$ vollständig ist:

Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchyfolge aus $\mathcal{K}$.

- Überprüfen Sie, dass durch $B_n := \overline{\bigcup_{k=n}^\infty A_k} = \overline{A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots}$ eine fallende Folge der Mengen definiert ist.
- Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge B_n kompakte und nicht leer, also ein Element von $\mathcal{K}$, ist.
- Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} d_H(A_n, B_n) = 0$.
- Folgern Sie daraus, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $A := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$ in $(\mathcal{K}, d_H)$ konvergiert.

(Nicht zu zeigen:) Den Grenzwert kann man auch folgendermaßen darstellen:

$$A = \left\{ \lim_{n\to\infty} a_n : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent und } a_n \in A_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 9

Eine weitere (sehr natürliche) Eigenschaft, die metrischen Räume oder deren Teilmengen haben können, ist der Zusammenhang. Es gibt zwei nicht äquivalente Definitionen dieses Begriffs:

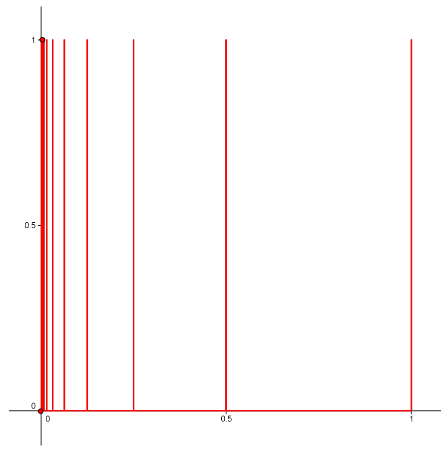
- Ein metrischer Raum (M, d) heißt *unzusammenhängend*, wenn eine Darstellung $M = U \cup V$ mit nicht leeren, disjunkten, offenen Mengen U, V existiert. Gibt es eine solche Darstellung nicht, so heißt M *zusammenhängend*. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt (un)zusammenhängend, wenn (A, d_A) (un)zusammenhängend ist.

- M heißt *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten $x, y \in M$ ein Weg zwischen x und y in M existiert, also eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Der Wegzusammenhang ist die stärkere Eigenschaft (siehe H1). Es existieren tatsächlich Mengen, die zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend sind. Ein Beispiel ist die Menge

$$\big(\{\tfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \times [0, 1]\big) \cup \big([0, 1] \times \{0\}\big) \cup \{(0, 1)\}$$

in $\mathbb{R}^2$. Allerdings stimmen diese Eigenschaften bei offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ überein.



Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (4.–6. Juni) gemeinsam gelöst.

T1. Beweisen Sie, dass stetige Bilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend sind. Genauer: Ist $f : (M, d) \to (M', d')$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und ist M zusammenhängend, so ist es $f(M)$ auch.

T2. Zeigen Sie:

(a) Jedes Intervall ist (weg)zusammenhängend.

(b) Die zusammenhängenden Mengen in $(\mathbb{R}, |.|)$ sind genau alle Intervalle (darunter auch $\emptyset$ und Einermengen).

T3. Es sei $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kontraktion von $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Konstante s. Weiterhin bezeichne $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ den metrischen Raum aller nicht leeren kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Hausdorff-Metrik. Für alle $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$W(K) := w(K).$$

Zeigen Sie, dass $W : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ eine Kontraktion ist und dass ihr Kontraktionsfaktor ebenso s ist.

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist **ausnahmsweise Mittwoch, der 11. Juni 2014 um 10 Uhr**. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. **Am gleichen Tag um 15:45** werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Zeigen Sie die nachstehenden Aussagen:

(a) Wegzusammenhängende Mengen sind zusammenhängend.

(b) Stetige Bilder wegzusammenhängender Mengen sind wegzusammenhängend.

H2. Ein klassisches Verfahren, um den Näherungswert für die Quadratwurzel einer positiven Zahl a zu berechnen, beginnt mit einem beliebigen $x_0 > 0$. In jedem Schritt wird die nächste Approximation x_{n+1} als das arithmetische Mittel von x_n und $\frac{a}{x_n}$ berechnet. Das Verfahren wird wiederholt, bis die erwünschte Genauigkeit erreicht wird. Begründen Sie diese Vorgehensweise wie folgt.

(a) Durch $f(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ ist eine Kontraktion auf $\big((0, +\infty), |.|\big)$ definiert.

(b) Das Bild von f liegt in $[\sqrt{a}, \infty)$.

(c) Verwenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz auf $f|_{[\sqrt{a},\infty)}$, um zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Warum ist es nötig, das Intervall zu verkleinern?

(d) Bestimmen Sie die Genauigkeit der Näherungswert von $\sqrt{7}$ nach 8 Schritten, wenn wir mit $x_0 = 7$ anfangen.

H3. Es seien $w_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, I$, Kontraktionen von $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Konstanten $s_i < 1$. Für alle $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$W(K) := \bigcup_{i=1}^{I} w_i(K).$$

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige $A_i, B_i \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, I$, gilt:

$$d_H(A_1 \cup \ldots \cup A_I, B_1 \cup \ldots \cup B_I) \leq \max_{i=1,\ldots,I} d_H(A_i, B_i).$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass $W : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ eine Kontraktion ist mit Kontraktionsfaktor $\max\{s_i : i = 1, \ldots, I\}$.

H4. Die Funktionen $w_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, seien definiert durch

$$w_1(x) := \frac{x}{3} \quad \text{und} \quad w_2(x) := \frac{x+2}{3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass w_1 und w_2 Kontraktionen sind.

(b) Sei $W : \mathcal{K}(\mathbb{R}) \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ wie in H3. Zeichnen Sie

$$W(J),\ (W \circ W)(J) \text{ und } (W \circ W \circ W)(J)$$

für $J = [0, 1]$.

(c) Der einzige Fixpunkt C von W heißt die *Cantor-Menge*. Zeigen Sie, dass sie total unzusammenhängend ist, d.h. dass deren größte zusammenhängende Teilmengen Einermengen sind. Dabei dürfen Sie ohne Beweis aus (b) folgern, wie C entsteht.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 10

Stefan Banach (1892-1945) war ein polnischer Mathematiker. Nach ihm sind unter anderem auch zwei uns bekannte Begriffe genannt, und zwar der Banachraum und der Banachsche Fixpunktsatz. Er war vor allem in der Funktionalanalysis tätig. Das ist ein Gebiet der Mathematik, das sich mit allgemeinen Vektorräumen, die mit Metrik, Norm oder Skalarprodukt versehen sind, befasst. Mit Mitteln der Funktionalanalysis können viele Probleme aus der Wissenschaft klar formuliert und gelöst werden. Ihre Anwendung auf Differentialgleichungen haben wir bereits kennen gelernt und das Verfahren wird in H2 geübt.

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (11.–13. Juni) gemeinsam gelöst.

T1. Bestimmen Sie den größtmöglichen Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$, wo die Funktion wohldefiniert ist, skizzieren Sie ihn, untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit und zeichnen Sie die Niveaulinien für

(a) $f(x,y) = \log(x^2 + y)$,

(b) $g(x,y) = \frac{y}{x}$.

T2. Bestimmen Sie Df für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 y^3.$$

T3. Es sei $M = (0, +\infty)$ und

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

die Metrik aus T1 vom sechsten Übungsblatt. Ist d äquivalent zu $|.|$? Stark äquivalent?

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 17. Juni 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Es sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $f : M \to M$ eine Abbildung, für die

$$x \neq y \implies d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y).$$

gilt. Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt. Betrachten Sie dafür die Funktion $x \mapsto d\big(x, f(x)\big)$.

H2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Finden Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

indem Sie das Verfahren aus Satz 4.44 verwenden:

(a) Bestimmen Sie zuerst die Abbildung T.

(b) Leiten Sie die Formel für alle Iterierten her, wenn man mit der Nullfunktion anfängt, d.h. berechnen Sie

$$\underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n}(0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Problems.

H3. Bestimmen und skizzieren Sie die größtmöglichen Bereiche in $\mathbb{R}^2$, wo die folgenden Vorschriften Funktionen definieren, und zeichnen Sie deren Niveaulinien für 0, $\pm\frac{1}{2}$ und ± 1:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$,

(b) $g(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

H4. Der Raum aller k-Tupel der Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ kann betrachtet werden als

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \cong \mathbb{R}^{nk}.$$

Eine Abbildung $M : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt k-linear, falls sie in jeder Komponente linear ist, d.h.

$$M(\alpha_1 v_1 + \beta_1 w_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha_1 M(v_1, u_2, \ldots, u_k) + \beta_1 M(w_1, u_2, \ldots, u_k)$$

für alle $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ und $v_1, w_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ und das Analoge in den anderen Komponenten.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung einer beliebigen k-linearen Abbildung.

(b) Leiten Sie das Skalarprodukt ab, also die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto u \cdot v.$$

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

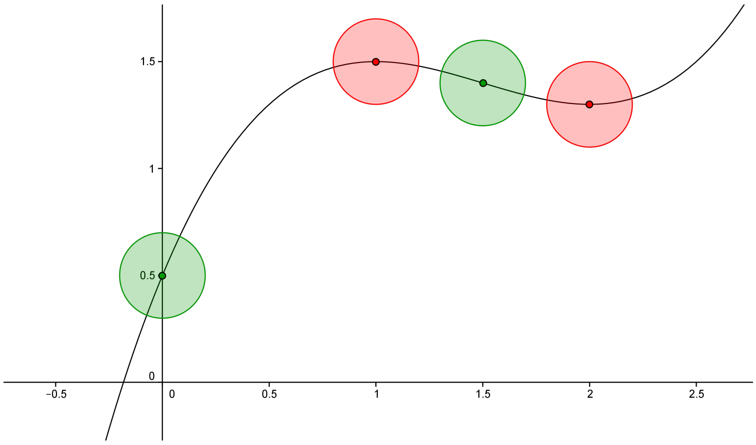
Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 11

Der Satz von der lokalen Inversen besagt, wann eine stetig differenzierbare Abbildung lokal umkehrbar ist. Für die Dimension 1 ist das auf dem Bild zu sehen. Ist in einem Punkt die Ableitung positiv bzw. negativ, dann ist die Funktion in einer Umgebung wachsend bzw. fallend. Wir können x als eine stetig differenzierbare Funktion von y darstellen und wir haben auch die Formel für die Ableitung. In stationären Punkten geht das aber nicht.



In höheren Dimensionen gilt Analoges. Die Ableitungen sind Matrizen, entscheidend ist aber auch hier, ob sie invertierbar sind oder nicht. Allerdings geht es um eine lokale Aussage, die nichts über den größtmöglichen Bereich, auf dem die inverse Abbildung existiert, aussagt.

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (18. und 20. Juni) gemeinsam gelöst.

T1. Bestimmen Sie die nachstehenden Grenzwerte (falls vorhanden):

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$, (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$.

T2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion.

(a) Berechnen Sie $g'(0)$ für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(t) := f(t, \sin t, e^t)$.

(b) Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_c(f)$ ein Weg entlang einer beliebigen Niveaumenge. Zeigen Sie, dass $(\operatorname{grad} f)(\gamma(0)) \perp \gamma'(0)$. Erklären Sie dieses Resultat.

T3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

definierte Abbildung.

(a) Berechnen Sie die Jakobimatrix von f und, wo sie existiert, ihre Inverse.

(b) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist und dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 24. Juni 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \quad , & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen überall existieren.

(b) Untersuchen Sie f, $\partial_x f$ und $\partial_y f$ auf Stetigkeit.

(c) Ist f differenzierbar in $(0, 0)$?

H2. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \sin(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f.

(b) Zeigen Sie, dass f in $(1, 0)^T$ ein lokaler Diffeomorphismus ist und bestimmen Sie die Ableitung der inversen Abbildung in $f(1, 0)$.

(c) Bestimmen und zeichnen Sie die Menge aller Punkte, wo f kein lokaler Diffeomorphismus ist.

H3. Schätzen Sie mit Hilfe der Ableitung ein, wie sich die größere Nullstelle verändert, wenn wir alle Koeffizienten der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

um 0,01 vergrößern.

H4. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad k, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha > 0$ gilt:

$$f(\alpha x) = \alpha^k f(x).$$

Zeigen Sie, dass

$$x \cdot \mathrm{grad} f(x) = k f(x)$$

gilt, indem Sie die obige Gleichung nach α ableiten und $\alpha = 1$ einsetzen. Ist jede Abbildung, die die letzte Gleichung erfüllt, homogen vom Grad k?

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 12

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (25.–27. Juni) gemeinsam gelöst.

T1. Berechnen Sie $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_x \partial_y f$ und $\partial_y \partial_x f$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := y \sin(xy^2) + e^{x^2}.$$

T2. Es sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4xy + 2xz + 4y - 3z &= 0 \\ xy + xz + 2x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass dadurch stetig differenzierbare Funktionen $y = y(x)$ in $z = z(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ eindeutig bestimmt sind.

(b) Berechnen Sie $y'(0)$ in $z'(0)$.

T3. Es seien $k \in \mathbb{R}^n$ und $1 < p < \infty$. Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Vorschriften

(a) $x \mapsto k \cdot x$,

(b) $x \mapsto \|x\|_p$.

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 1. Juli 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechnen Sie $\partial_x^2 z$, $\partial_x\partial_y z$ und $\partial_y^2 z$ für $z(x,y) := f(x^2+y^2, xy)$.

H2. Zeigen Sie, dass unendlich viele Funktionen $z = z(x,y)$ existieren, die

- in einer Umgebung von $(0,1)$ definiert und stetig differenzierbar sind,
- die Gleichung $\sin(xy) + \sin(xz) + z\sin(yz) = 0$ erfüllen.

Für eine von diesen berechnen Sie noch $Df(0,1)$.

H3. Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \quad , & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

gegeben.

(a) Rechtfertigen Sie ohne abzuleiten, dass $\partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ gilt.

(b) Zeigen Sie $\partial_x\partial_y f(0,0) \neq \partial_y\partial_x f(0,0)$.

H4. (a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 3$ die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \|x\|_2^{2-n}$$

eine Lösung der *Laplacegleichung*

$$\sum_{i=1}^n \partial_i^2 \varphi(x) = 0$$

ist.

(b) Es sei $c > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$ und $\omega := c\|k\|_2$. Es sei weiter $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) := g(k \cdot x - \omega t)$$

eine Lösung der *Wellengleichung* (auch *Schwingungsgleichung*)

$$\partial_t^2 f(x,t) = c^2 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 f(x,t)$$

ist.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

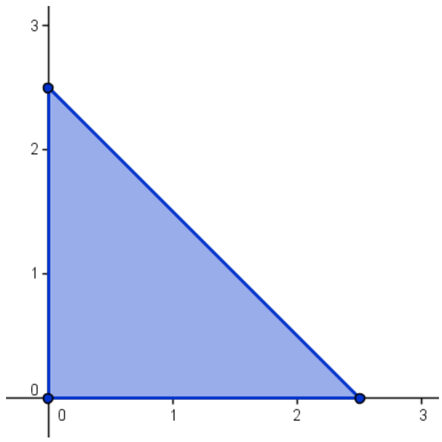
Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 13

In jedem metrischen Raum nimmt eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge die globalen Extrema an. Bei differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ kann man sie analog wie in der Dimension 1 bestimmen (vgl. mit der Einleitung vom Blatt 13 zur Analysis 1). Nämlich, die Extrema können im Inneren oder auf dem Rand liegen. Im ersten Falle geht es um ein lokales Extremum, also muss dort $Df = 0$ gelten. Das Verhalten auf dem Rand muss separat untersucht werden. Allerdings ist das in höheren Dimensionen aufwendiger als in der Dimension 1, wo der Rand eines Intervalls nur aus zwei Punkten besteht.



In der Aufgabe H4 werden die globalen Extrema auf dem abgebildeten Dreieck gesucht. Der Rand des Gebiets sind hier die drei Seiten des Dreiecks. Die Kandidaten für die Extrema sind also die lokalen Extrema im Inneren und die Extremwerte auf den Seiten.

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (2.–4. Juli) gemeinsam gelöst.

T1. Es sei $x \in \mathbb{R}^3$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Bestimmen Sie

(a) $x^{(2,0,3)}$ und $\sum_{|\alpha|=2} x^\alpha$,

(b) $(0,2,1)!$ und $(4,3,2)!$,

(c) $\partial^{(7,4,1)} f$.

T2. Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Ursprung von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := 2x + (1+y)^2 \sin(x+z)$$

bis zu den Termen dritter Ordnung und berechnen Sie den Näherungswert von $0{,}2 + 1{,}1^2 \sin 0{,}3$.

T3. Finden und klassifizieren Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy.$$

Hausaufgaben

Die Abgabefrist für die Hausaufgaben ist Dienstag, der 8. Juli 2014 um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich die Gruppennummer auf die erste Seite und heften Sie alle Blätter zusammen. Die Kästen befinden sich im Foyer des Gebäudes L. Am gleichen Tag werden die Hausaufgaben in der Globalübung besprochen werden.

H1. Berechnen Sie $\partial_x^{31}\partial_y^{7}f(0,0)$ und $\partial_x^{54}\partial_y^{74}\partial_x^{90}f(0,0)$, wobei

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y):=\frac{1}{1-x-y+xy}.$$

H2. Beweisen Sie, dass durch die Gleichung

$$z^3+yz-xy^2-x^3=0$$

eine stetig differenzierbare Funktion $z=z(x,y)$ in einer Umgebung von $(x,y)=(1,1)$ wohldefiniert ist. Berechnen Sie noch deren zweites Taylorpolynom (um $(1,1)$).

H3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y):=(1+e^y)\cos x-ye^y$$

unendlich viele lokale Maxima, jedoch kein lokales Minimum besitzt.

H4. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y):=xy^2(3-x-y)$$

auf dem (abgeschlossenen) Dreieck mit den Ecken in $(0,0)$, $(0,\frac{5}{2})$ und $(\frac{5}{2},0)$.

Prof. Dr. Bernd Schmidt
Martin Jesenko, M.Sc.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Analysis 2

im Sommersemester 2014

Übungsblatt 14

In dieser Woche enden die zwei wichtigsten Sachen im Sommersemester: die WM im Fußball und der Kurs zur Analysis 2. Das ganze Analysis 2-Aufgebot wünscht Ihnen

**VIEL ERFOLG BEI DEN PRÜFUNGEN
UND SCHÖNE SOMMERFERIEN!**

Tutorübungen

Diese Aufgaben werden in den Übungsgruppen (9.–11. Juli) gemeinsam gelöst.

T1. Finden Sie die Punkte auf dem Ellipsoid $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1\}$ mit dem größtmöglichen Abstand zur Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y + 12z = 288\}$.

T2. Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := 3x^2 - 2xy + 3y^2,$$

in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2.

Zusätzliche Aufgaben

Die Lösungen zu diesen Aufgaben werden sich auf einem separaten Blatt befinden.

Z1. Bestimmen Sie das Dreieck mit vorgegebenem Umfang, dessen Flächeninhalt größtmöglich ist. Tipp: Verwenden Sie die Heronsche Formel.

Z2. Berechnen Sie den größten und den kleinsten Wert des Ausdrucks $\sin \frac{\pi xy}{3}$ auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Z3. Der durch einen Widerstand R fließende elektrische Strom I erzeugt pro Zeiteinheit Wärme, die proportional zu I^2R ist. Zeigen Sie, dass sich in einem Stromkreis mit einer Spannungsquelle und drei parallel geschalteten Widerständen R_1, R_2, R_3 der Strom so verteilt, dass die gesamte erzeugte Wärme minimal ist.