TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 1

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z1.1. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen auf dem angegebenen Definitionsbereich:

(a) x für $-2 \leq x \leq 2$

(b) x^2 für $-2 \leq x \leq 2$

(c) x^3 für $-2 \leq x \leq 2$

(d) $x^3 - x$ für $-2 \leq x \leq 2$

(e) $\cos x$ für $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

(f) $\sqrt{x}$ für $0 \leq x$

Z1.2. Berechnen Sie sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

(a) $2x^2 + 12x + 10 = 0$

(b) $3x > x^2 + 1$

(c) $\cos x = 2$

(d) $\cos x = 1$

(e) $\cos^2 x = 1$

Z1.3. (a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x^2 \ln(\cos x)}{e^x+1}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \sin\xi \mathrm{d}\xi$

Tutorübungen

T1.1. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen auf dem angegebenen Definitionsbereich:

(a)	$-x+2$	für $-1 \leq x \leq 4$	(g)	$\sin x$	für $0 \leq x \leq 2\pi$
(b)	$(-x+2)^2 - 1$	für $-1 \leq x \leq 4$	(h)	$\sin(x + \frac{\pi}{2})$	für $0 \leq x \leq 2\pi$
(c)	$\lvert -x+2\rvert - 1$	für $-1 \leq x \leq 4$	(i)	$\sin(2x)$	für $0 \leq x \leq 2\pi$
(d)	$x^2 - 4x + 3$	für $-1 \leq x \leq 4$	(j)	$2\sin x$	für $0 \leq x \leq 2\pi$
(e)	e^x	für $-1 \leq x \leq 1$	(k)	$\sin^2 x$	für $0 \leq x \leq 2\pi$
(f)	$\ln x$	für $0 < x \leq e$			

T1.2. Berechnen Sie sämtliche reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

(a)	$-x+2 \geq 0$	(e)	$\sin x = 1$
(b)	$x^2 - 4x + 3 = 0$	(f)	$\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$
(c)	$2x^2 < 8x - 6$	(g)	$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$
(d)	$e^{x^2-1} + 2 = 3$		

T1.3. (a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$:

$f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 1$ $\quad$ $f_5(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f_2(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ für $x \neq 0$ $\quad$ $f_6(x) = \mathrm{e}^x$

$f_3(x) = x \sin x$ $\quad$ $f_7(x) = \mathrm{e}^{x^2-1} + 2$

$f_4(x) = \tan(x^2 - 1)$ $\quad$ $f_8(x) = \ln x$ für $x > 0$

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_0^x 3\xi^4 - 2\xi^2 + \xi + 1 \, \mathrm{d}\xi$ $\quad$ (iv) $\int_0^{2\pi} \sin \xi \, \mathrm{d}\xi$

(ii) $\int_x^\infty \frac{2}{\xi^2} \, \mathrm{d}\xi$ für $x > 0$ $\quad$ (v) $\int_0^{2\pi} |\sin \xi| \, \mathrm{d}\xi$

(iii) $\int_1^x \frac{1}{\xi} \, \mathrm{d}\xi$ für $x > 0$

Die Tutoraufgaben werden am 21.10.2013 bis 24.10.2013 besprochen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 2

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z2.1. Für $n, m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, mit $m \leq n$ heißen

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Binomialkoeffizienten.

(a) Zeigen Sie für $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $m \leq n$ die Rekursionsformel für den Binomialkoeffizienten.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

(b) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion den Binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Z2.2. Zeigen Sie: Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben:

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$$
$$p_j : \text{Primzahlen}, \quad r_j \in \mathbb{N}_0$$

Hinweis: Vollständige Induktion.

Tutorübungen

T2.1. Berechnen Sie:

(a) $\ln\left(\prod_{k=0}^{10} \mathrm{e}^k\right)$

(b) $\sum_{k=0}^{2013} \cos(k\pi)$

(c) $\sum_{k=0}^{0} \mathrm{e}^{k\mathrm{e}^k + (\ln(k+1))(k+1)^{k+1}}$

T2.2. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

(b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

T2.3. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Die Tutoraufgaben werden am 28.10.2013 bis 31.10.2013 besprochen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 3

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z3.1. Zeigen Sie, dass der Raum $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen der reellen Zahlengerade auf sich selbst die Vektorraumaxiome erfüllt. Für $f, g \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir eine Addition $\oplus$ und eine Skalarmultiplikation $\odot$ *punktweise*, d.h. nach folgenden Regeln:

(a) $h = f \oplus g$ ist die Funktion in $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, für die gilt:

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

(b) $k = \alpha \odot f$ ist die Funktion in $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, für die gilt:

$$k(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Z3.2. (a) Zeigen Sie, dass folgende Ausdrücke Normen im $\mathbb{R}^2$ sind, wobei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie jeweils die Mengen $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{v}\| = 1\}$.

(i) $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|\}$ (Maximumsnorm)

(ii) $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2|$

(iii) $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ (Euklidische Norm)

(b) Zeigen Sie, dass folgende Ausdrücke keine Normen im $\mathbb{R}^2$ definieren, wobei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

(i) $\|\mathbf{v}\| = v_1 + v_2$

(ii) $\|\mathbf{v}\| = |v_1|$

(iii) $\|\mathbf{v}\| = v_1^2 + v_2^2$

Z3.3. Zeigen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes: Es schneide in einem Dreieck mit Eckpunkten A, B und C die Winkelhalbierende im Punkt C die gegenüberliegende Seite c im rechten Winkel. Dann haben die an C angrenzenden Seiten a und b gleiche Länge.

Tutorübungen

T3.1. Wir betrachten die Vektoren aus $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $2\mathbf{x}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{z}$, $2\mathbf{x}-\frac{1}{2}\mathbf{z}$.

(b) Überprüfen Sie am Beispiel der obigen Vektoren die Gültigkeit der Dreiecksungleichung bzgl. der euklidischen Norm

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2$$

sowie bzgl. der Maximumsnorm

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty.$$

T3.2. Gegeben sei ein Dreieck im Anschauungsraum, bei welchem zwei Seiten durch die Vektoren

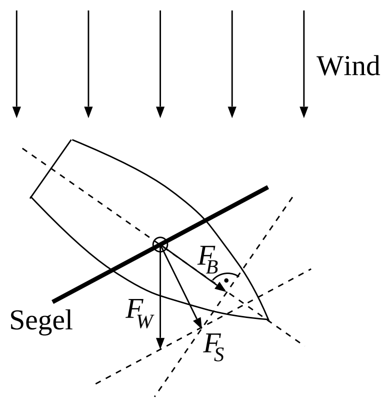
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben sind.

Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{c}$ für die dritte Seite, sowie sämtliche Seitenlängen und Winkel des Dreiecks.

T3.3. Der Kurs eines Segelbootes soll im Winkel α zur Windrichtung verlaufen. Auf das Segel wirkt nur die zu seiner Fläche orthogonale Komponente der Windkraft F_W. Diese wollen wir mit F_S bezeichnen. Auf das Boot wirkt wiederum nur die in Fahrtrichtung liegende Komponente der Segelkraft F_S, da das „Schwert“ eine Abdrift des Bootes verhindert. Die Kraftkomponente in Fahrtrichtung bewirkt den Vortrieb und sei mit F_B bezeichnet. Welchen Winkel muss das Segel zum Wind haben, um einen maximalen Vortrieb zu liefern?

Durch „Kreuzen“ kann ein Segelboot auch direkt gegen den Wind fahren. Wie funktioniert das?



Die Tutoraufgaben werden am 4.11.2013 bis 7.11.2013 besprochen.

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

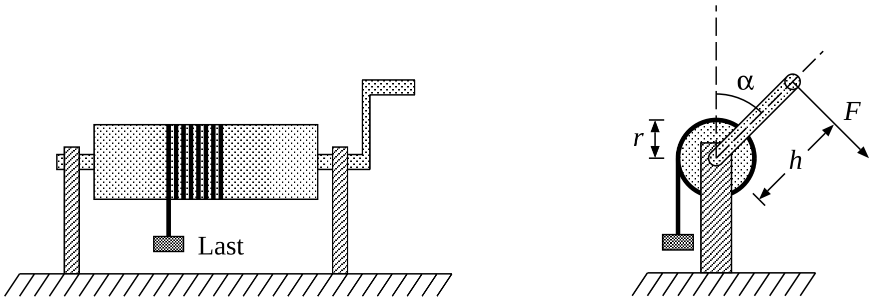
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 4

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z4.1. Eine Last der Masse $m = 10$ kg hängt an einem Seil, dessen Ende auf eine Winde gewickelt ist. Der Radius der Winde beträgt $r = 10$ cm. An einer Kurbel der Länge $h = 30$ cm greift tangential eine Kraft F an. Wie groß muß der Betrag der Kraft F sein, damit die Winde im Gleichgewicht gehalten wird? Welche Kraft greift an den Lagern der Winde an, wenn die Kurbel im Winkel α zur Vertikalen steht?



Z4.2. Untersuchen Sie mit Hilfe des Spatprodukts, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren komplanar im $\mathbb{R}^3$ sind:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4-\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Z4.3. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Tutorübungen

T4.1. Untersuchen Sie mit Hilfe des Spatprodukts, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Punkte mit den folgenden Ortsvektoren in einer Ebene liegen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

T4.2. Gegeben sei ein Dreieck im dreidimensionalen Anschauungsraum, dessen Eckpunkte durch die Ortsvektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{N}$, sodass das Dreieck den Flächeninhalt 3 besitzt.

T4.3. Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Tutoraufgaben werden am 11.11.2013 bis 14.11.2013 besprochen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 5

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z5.1. Es seien folgende Geraden im Raum durch die Punkt-Richtungsform in Koordinaten gegeben, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zusätzliche Parameter sind.

$$g_1 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \qquad g_2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig}.$$

Bestimmen Sie die Schnittmenge $g_1 \cap g_2$ abhängig von den zusätzlichen Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Falls $g_1 \cap g_2 = \varnothing$ bestimmen Sie den kürzesten Abstand zwischen g_1 und g_2.

Z5.2. Durch drei Punkte im Raum mit den folgenden Ortsvektoren in Koordinaten sei die Ebene E gegeben:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Punkt-Richtungsform und die Hessesche Normalform der Ebenengleichung von E. Welchen Abstand hat der Punkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ zu der Ebene E? Liegt dieser Punkt auf der gleichen Seite von E wie der Koordinatenursprung?

Tutorübungen

T5.1. Gegeben sei die Gerade g_1, die durch die zwei folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$ verläuft.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Punkt-Richtungsform und die Hessesche Normalform von g_1.

(b) Gegeben sei zusätzlich die Gerade g_2 mit der Punkt-Richtungsform:

$$g_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

Berechnen Sie alle Punkte die von g_1 und g_2 den gleichen Abstand haben.

T5.2. Gegeben sei die Ebene E in Punkt-Richtungsform:

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

Betrachten Sie zusätzlich die Gerade g, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 verläuft.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle Punkte der Gerade g, die den Abstand $\sqrt{3}$ von E haben.

T5.3. E_1 sei die Ebene, die durch die drei Punkte im Raum mit folgenden Ortsvektoren gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Punkt-Richtungsform und die Hessesche Normalform von E_1.

(b) Die Punkt-Richtungsform der Ebene E_2 sei:

$$E_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

Berechnen Sie die Schnittmenge von E_1 und E_2

(c) Wir wollen die Ebene E_1 so drehen, dass sie mit E_2 übereinstimmt. Um welche Drehachse (eine Gerade) muss die Ebene rotiert werden, sodass das passiert? Geben Sie auch den Rotationswinkel an.

Die Tutoraufgaben werden am 18.11.2013 bis 21.11.2013 besprochen.

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 6

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z6.1. Berechnen Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Produkte je zweier „zusammenpassender“ Matrizen, sowie die Matrizen A^T und B^3.

Z6.2. Geben Sie für $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & -8 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \end{array}$$

Z6.3. Bestimmen Sie Rang und Kern von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (falls möglich) die Inverse der Matrix A.

Tutorübungen

T6.1. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, soweit möglich, die Matrixprodukte

$$AB,\ AC,\ A^TB,\ A^TC,\ BA,\ BC,\ B^TA,\ B^TC,\ CA,\ CB,\ C^TA,\ C^TB.$$

T6.2. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus für $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 &= 3. \end{aligned}$$

T6.3. Untersuchen Sie für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda & -2 \\ 1 & \lambda^2 & 1-2\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda\,(2-\lambda) \\ 2 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie jeweils alle Lösungen für die Fälle $\lambda = -1, 1, 2$, sofern sie existieren.

Schriftliche Übung

S6.1. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Formel für Binomialkoeffizienten.
$\forall n \in \mathbb{N} : \forall m \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

(**Hinweis: Z2.1.** (a))

(b) Berechnen Sie die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) (i) Für $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ sei die Ebene E_α durch folgende Punkt-Richtungsform gegeben:

$$E_\alpha : \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Bestimmen Sie deren Hessesche Normalform abhängig vom Parameter α.

(ii) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von E_α. Liegt dieser Punkt abhängig von α auf der gleichen Seite von E_α wie der Koordinatenursprung?

(iii) Berechnen Sie den Punkt der Ebene E_4 ($\alpha = 4$) der $\mathbf{p}$ am nächsten liegt.

Die Tutoraufgaben werden am 25.11.2013 bis 28.11.2013 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Pellekoorne (1), de Benito (3), etc.) darauf.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 7

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z7.1. Seien $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Für $i \neq j$ definiere $N_{i\,j}$ als die Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die aus Nullelementen besteht, außer dem Eintrag (i, j), an dem sich eine 1 befindet. Zum Beispiel:

$$N_{2\,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_{1\,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ usw.}$$

Damit definieren wir die *Elementarmatrizen*:

$$E_{i\,j} := \mathrm{Id}_3 + N_{i\,j},$$

wobei Id_3 die 3×3 Einheitsmatrix ist. Mit Hilfe solcher Matrizen kann man einige der auf Zeilen und Spalten wirkenden Elementaroperationen beschreiben, die Teil des Gauß Algorithmus sind. Sei jetzt $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beliebig und seien $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i < j$.

(a) Zeigen Sie, dass die Addition der j-ten Zeile von A auf die i-te Zeile sich als folgendes Produkt darstellen lässt:
$$AE_{i\,j}.$$

(b) Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass die Addition der mit α multiplizierten j-ten Spalte auf die i-te Spalte sich als folgendes Produkt darstellen lässt:
$$A(\mathrm{Id}_3 + \alpha N_{j\,i}).$$

(c) Berechnen Sie die Determinante
$$\det(\mathrm{Id}_3 + \alpha N_{i\,j}), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(d) Zeigen Sie, dass Addition des Vielfachen einer Zeile bzw. Spalte auf eine andere Zeile bzw. Spalte einer Matrix, den Wert ihrer Determinante nicht ändert. Verwenden Sie die Produktformel der Determinante.

(e) Begründen Sie, weshalb das auch für $\mathbb{R}^{n\times n}$, mit $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(f) Berechnen Sie $\det(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z7.2. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?
Geben Sie gegebenenfalls jeweils ein Erzeugendensystem, eine Basis und die Dimension an.

(a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

(c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 0\}$

(d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$

(e) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$

(f) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

Z7.3. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ die Dimension des durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraumes des $\mathbb{R}^4$.

Tutorübungen

T7.1. (a) Gegeben Sei die Drehmatrix D_α für $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(D_\alpha)$, D_α^{-1}, $\det(D_\alpha^{-1})$, D_α^T und $\det(D_\alpha^T)$.

(b) Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie außerdem $\det(A)$ und $\det(A^{-1})$.

T7.2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$?

(a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 = a\}, a \in \mathbb{R}$

(b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_2 = 0\}$

(c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$

(d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 \cdot x_2 = 0\}$

(e) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_2 = 0\}$.

Skizzieren Sie die Mengen für den Fall $n = 2$ und kartesische Koordinaten $x_1,\ x_2$.

T7.3. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind. Geben Sie eine Basis des von den 4 Vektoren aufgespannten Untervektorraums an.

Die Tutoraufgaben werden am 2.12.2013 bis 5.12.2013 besprochen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 8

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z8.1. Sei f eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in sich selbst mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, sodass $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $A\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$. Was bedeuten die Begriffe $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Rang}(A)$ für die Abbildung f?

Z8.2. Wir betrachten die folgenden linearen Abbildungen in der (x, y)-Ebene:

(a) Spiegelung an der x-Achse

(b) Spiegelung an der durch die Gleichung $x = y$ gegebenen Geraden

(c) Drehung um den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung

Bestimmen Sie die jeweiligen Matrizen A, B, C_φ dieser linearen Abbildungen bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$. Welche dieser Matrizen sind symmetrisch, welche orthogonal und welche positiv definit? Berechnen Sie das Produkt AB und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Matrix C_φ. Für welches φ stimmen beide Matrizen überein?

Z8.3. Zeigen Sie, dass die Spiegelung an der Ebene E, die im $\mathbb{R}^3$ durch

$$E : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

mit einem normierten Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{n}\| = 1$ eine lineare Abbildung ist.

Tutorübungen

T8.1. Welche der folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, 6$ sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie gegebenenfalls die Matrix der linearen Abbildung bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ an.

$$\begin{array}{lcccl}
f_1 & : & (x_1, x_2)^T & \mapsto & (x_1, x_2 - x_1, x_1)^T \\
f_2 & : & (x_1, x_2)^T & \mapsto & (x_1, 0, x_1 + 2)^T \\
f_3 & : & (x_1, x_2)^T & \mapsto & (0, 0, 0)^T \\
f_4 & : & (x_1, x_2)^T & \mapsto & (x_1 + 3x_2, 2x_2 - 4x_1, 4x_2 + 5x_1)^T \\
f_5 & : & (x_1, x_2)^T & \mapsto & (x_1, \cos(x_1), 0)^T \\
f_6 & : & (x_1, x_2)^T & \mapsto & (x_2, x_2 + 2x_1, |x_1|)^T
\end{array}$$

T8.2. Eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ heißt Spiegelung(-smatrix), falls es einen Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ des $\mathbb{R}^3$ gibt derart, dass

$$S\mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad \text{und} \quad S\mathbf{w} = \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \perp \mathbf{v}.$$

Die von allen Vektoren $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ aufgespannte Ebene heißt Spiegelungsebene.

(a) Zeigen Sie, dass $S^2 = I$ gilt, und folgern Sie $S^T = S$.

(b) Ergänzen Sie die Einträge der Matrix S

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ -\sqrt{2} & 0 & * \\ -1 & * & * \end{pmatrix},$$

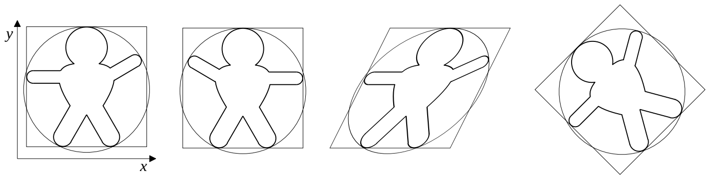
sodass S eine Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

T8.3. Nikolaus Ruprecht (Mathematik mit Nebenfach Plätzchenkunde, 1. Semester) ist ein sehr gewissenhafter Student. Daher hat er sich auch gleich zu Beginn des Studiums sämtliche Bücher gekauft, die ihm seine Dozenten empfohlen haben. Jetzt ist er so gut wie pleite und würde doch zu gerne für seine Kommilitonen einige Weihnachtsplätzchen backen. Sein Restvermögen reicht gerade noch für 250g Mehl, eine Messerspitze Backpulver, 65g Zucker, eine Prise Salz (das ist so viel, wie zwischen Daumen und Zeigefinger paßt), 125g Butter, ein Ei, eine völlig zerbröselte Tafel Schokolade und eine Hampelmann-Ausstechform Marke «Leonardo» (im Super-Sonderangebot). Die Zutaten knetet er ordentlich durch, stellt den Teig für eine halbe Stunde in den Kühlschrank und rollt ihn anschließend 3-4mm dick aus, um die Hampelmänner auszustechen. Nachdem er sein erstes Blech bei 225°C ca. 9 Minuten lang gebacken hat, zieht er es aus dem Ofen und überlegt, dass es doch ziemlich langweilig ist, immer bloß die gleichen Hampelmänner auszustechen. Aber für ein zweites Förmchen hätte seine Barschaft längst nicht mehr gereicht!

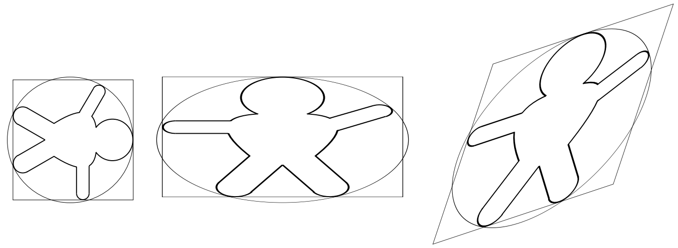
Glücklicherweise fällt Nikolaus in diesem Moment ein, dass er an der Uni gerade etwas über «lineare Abbildungen» gelernt hat. Mit etwas Fingerspitzengefühl und einem Nudelholz gelingt es ihm, die durch folgende Matrizen geebenen linearen Abbildungen auf seine ausgestochenen Hampelmänner anzuwenden:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Als Ergebnisse erhält er:



Original $\quad H_1 \quad H_2 \quad H_3$


$H_4 \quad H_5 \quad H_6$

(a) Ordnen Sie die fertigen Hampelmänner H_1-H_6 den Matrizen L_1-L_6 zu!

(b) Wie musste Nikolaus die Hampelmänner bearbeiten (mit Nudelholz, Fingern und allem was dazugehört), um die Ergebnisse H_1-H_6 zu erhalten?

(c) Schmeißen Sie Ihren Backofen an, kneten Sie Zutaten, experimentieren Sie mit «linearen Plätzchenabbildungen» (Gruppenarbeit erlaubt!!!) und diskutieren (bzw. verzehren) Sie die Ergebnisse anschließend in den Tutorgruppen.

Schriftliche Übungen

S8.1. (a) Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche α ist A_α invertierbar?

(ii) Berechnen Sie die Matrix A_8^{-1} ($\alpha = 8$).

(iii) Lösen Sie das Gleichungssystem $A_8\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Auf Übungsblatt 6 zur Technischen Mechanik haben Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{29}} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{\sqrt{101}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{101}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{101}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

aufgestellt. Bestimmen Sie dessen Lösung durch Gauß-Elimination.

(c) (i) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, mit $\mathrm{Kern}(A) = \emptyset$.

(ii) Zeigen Sie, die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aus **Z3.1**.

(iii) Seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von V. Zeigen bzw. widerlegen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ bzw. $U_1 \cap U_2$ Untervektorräume von V sind.

Die Tutoraufgaben werden am 9.12.2013 bis 13.12.2013 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Pellekoorne (1), de Benito (2), etc.) darauf.

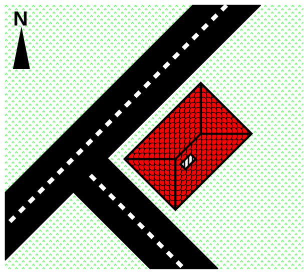
Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 9

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z9.1. Gegeben sei ein Grundstück mit Haus.

Die x- und y-Achsen des Grundstück-Koordinatensystems seien in Richtung der nahegelegenen Straßen gewählt. Auf einem (genordeten) Plan liegen die Achsen jedoch anders. Dort liegen die Koordinatenachsen in Ost- und Nordrichtung. Geben Sie den Basiswechselmatrix an um die Grundstücks-Koordinaten in die Plan-Koordinaten umzurechnen.



Z9.2. Es seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = (0, 0, 7)^T \qquad \mathbf{v}_2 = (3, 4, 5)^T$$

gegeben. Mit W sei der Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, der durch $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aufgespannt wird.

(a) Bestimmen Sie mittels Schmidtscher Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von W.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{P}$ der orthogonalen Projektion auf W bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ der Spiegelung an W bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

(d) Zu welcher linearen Abbildung ist $\mathbf{P} - \mathbf{A}$ die Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$? Bestätigen Sie Ihre Vermutung durch Rechnung!

Z9.3. Durch folgende Vektoren im $\mathbb{R}^2$ seien Punkte in der Anschauungsebene gegeben:

$$(-2, 1)^T \qquad (-1, 0)^T \qquad (0, 0)^T \qquad (1, 2)^T \qquad (2, -2)^T$$

(a) Bestimmen Sie die Ausgleichsparabel $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ zu diesen Punkten.

(b) Bestimmen Sie das Ausgleichspolynom 3. Grades $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ zu diesen Punkten.

Tutorübungen

T9.1. (a) Man bestimme die Matrix R des Basisüberganges von der Basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$ zur kanonischen Basis des $\mathbb{R}^5$, wobei

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie R^{-1}.

(b) Gegeben Sei die Übergangsmatrix bezüglich der Basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$ des $\mathbb{R}^5$ und der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 & -16 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -7 & 4 & -15 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^5$ und der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$.

T9.2. Wir betrachten die sogenannte *Normalenprojektion*. Dabei werden die Punkte des dreidimensionalen Anschauungsraumes in *Blickrichtung* $\mathbf{b}$ mit $\|\mathbf{b}\| = 1$ auf eine Ebene E durch den Ursprung $\mathbf{0}$ und senkrecht zu $\mathbf{b}$ projiziert. Sei im folgenden die Darstellung des Vektors $\mathbf{b}$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben durch $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$.

(a) Geben Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der Normalenprojektion $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an.

(b) Bestimmen Sie mittels Schmidtscher Orthogonalisierung ein kartesisches Koordinatensystem, in dem $\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}$. Warum liegen $\mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_3$ dann automatisch in E?

(c) Stellen Sie die Abbildungsmatrix P bezüglich der Basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ dar.

(d) Zeichnen Sie das in der Ebene E liegende Bild des Tetraeders mit den Eckpunkten gegeben durch

$$\mathbf{a} = (3, 4, 5)^T, \ \mathbf{b} = (3, 4, 0)^T, \ \mathbf{c} = (0, 0, 0)^T, \ \mathbf{d} = (-1, 7, 0)^T$$

unter der Normalenprojektion P.

T9.3. Letztes Jahr hatte Niko der Weihnachtsmann mal wieder so unglaublich viel zu tun, daß er mit seinem Ren(n)tierschlitten innerhalb einer Nacht glatt 736 mal geblitzt wurde. Da ist der Lappen natürlich weg – und sein «Schlitten» sichergestellt. Zu allem Unglück ist er in diesem Jahr auch noch in den Bergen eingeteilt: «Und das alles zu Fuß!» stöhnt er. Glücklicherweise erinnert er sich an das «James Bond-Lucky Luke-Doppelfeature», das er neulich im Kino gesehen hat: Kurzentschlossen bindet er ein langes Seil zwischen zwei Berggipfel, schnappt sich einen Kleiderbügel, saust damit das Seil entlang und schmeißt dabei die Geschenke ab.

Eine optimale Höhe über den Kaminen der Häuser (= «Einwurflöcher») beträgt 20m. Wenn Niko zu hoch fliegt, so gehen selbst die sorgfältigst verpackten Geschenke zu Bruch, ist er zu niedrig, so vernebelt ihm der Qualm aus dem Kamin die Sicht und er wirft daneben. Im optimalen Fall müßte seine Flugbahn daher entlang der folgenden Orts-Höhen Paare (x, h) verlaufen (das klappt aber nur mit dem Schlitten):

x(m)	h(m)
0	150
200	100
600	70
1000	20
1200	30

Wie muß Niko sein Seil spannen, um dieser optimalen Flugbahn möglichst nahe zu kommen?

(a) Zunächst spannt er sein Seil ganz gerade, d.h. in der Form

$$h(x) = a + bx.$$

Bestimmen Sie mittels linearer Ausgleichsrechnung die optimalen Parameter $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Niko kann seine Flugbahn noch verbessern, indem er das Seil etwas lockerer spannt, so daß es wie eine Parabel

$$h(x) = a + bx + cx^2$$

durchhängt. Bestimmen Sie auch in diesem Fall mittels linearer Ausgleichsrechnung die optimalen Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) Zeichnen Sie beide Flugbahnen und vergleichen Sie sie.

Die Tutoraufgaben werden am 16.12.2013 bis 19.12.2013 besprochen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 10

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z10.1. Durch folgende Vektoren im $\mathbb{R}^2$ seien Punkte in der Anschauungsebene gegeben:

$$(-2,1)^T \qquad (-1,0)^T \qquad (0,0)^T \qquad (1,2)^T \qquad (2,-2)^T$$

(a) Bestimmen Sie die Ausgleichsparabel $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ zu diesen Punkten.

(b) Bestimmen Sie das Ausgleichspolynom 3. Grades $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ zu diesen Punkten.

Z10.2. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von

(a) $(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})$,

(b) $\mathrm{Im}((1 - 3\mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i}))$,

(c) $\frac{1+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$,

(d) $\overline{\left(\frac{1}{(-3+\mathrm{i})^2}\right)}$,

Z10.3. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 4 < 3|z - 4\mathrm{i}|\}$

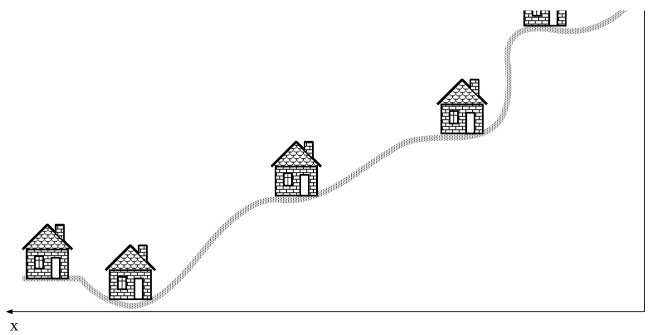
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}((1 - \mathrm{i})\overline{z}) = 1\}$

Tutorübungen

T10.1. Letztes Jahr hatte Niko der Weihnachtsmann mal wieder so unglaublich viel zu tun, daß er mit seinem Ren(n)tierschlitten innerhalb einer Nacht glatt 736 mal geblitzt wurde. Da ist der Lappen natürlich weg – und sein «Schlitten» sichergestellt. Zu allem Unglück ist er in diesem Jahr auch noch in den Bergen eingeteilt: «Und das alles zu Fuß!» stöhnt er. Glücklicherweise erinnert er sich an das «James Bond-Lucky Luke-Doppelfeature», das er neulich im Kino gesehen hat: Kurzentschlossen bindet er ein langes Seil zwischen zwei Berggipfel, schnappt sich einen Kleiderbügel, saust damit das Seil entlang und schmeißt dabei die Geschenke ab.

Eine optimale Höhe über den Kaminen der Häuser (= «Einwurflöcher») beträgt 20m. Wenn Niko zu hoch fliegt, so gehen selbst die sorgfältigst verpackten Geschenke zu Bruch, ist er zu niedrig, so vernebelt ihm der Qualm aus dem Kamin die Sicht und er wirft daneben. Im optimalen Fall müßte seine Flugbahn daher entlang der folgenden Orts-Höhen Paare (x, h) verlaufen (das klappt aber nur mit dem Schlitten):

x(m)	h(m)
0	150
200	100
600	70
1000	20
1200	30



Wie muß Niko sein Seil spannen, um dieser optimalen Flugbahn möglichst nahe zu kommen?

(a) Zunächst spannt er sein Seil ganz gerade, d.h. in der Form

$$h(x) = a + bx.$$

Bestimmen Sie mittels linearer Ausgleichsrechnung die optimalen Parameter a, $b \in \mathbb{R}$.

(b) Niko kann seine Flugbahn noch verbessern, indem er das Seil etwas lockerer spannt, so daß es wie eine Parabel

$$h(x) = a + bx + cx^2$$

durchhängt. Bestimmen Sie auch in diesem Fall mittels linearer Ausgleichsrechnung die optimalen Parameter a, b, $c \in \mathbb{R}$.

(c) Zeichnen Sie beide Flugbahnen und vergleichen Sie sie.

T10.2. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von

(a) $(3 + 3\mathrm{i})^3$,

(b) $\left(-\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$,

(c) $\overline{\left(\frac{1}{(-3+\mathrm{i})^2}\right)}$,

(d) $\frac{-2+2\mathrm{i}}{-2+1\mathrm{i}}$,

(e) $\frac{(1-\mathrm{i})^5}{\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^3)}$.

T10.3. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |-z-1| < 2|z|\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}((1+3\mathrm{i})\overline{z}) = 1\}$

Die Tutoraufgaben werden am 7.1.2014 bis 9.1.2014 besprochen.

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 11

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z11.1. (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginäranteil, sowie den Betrag von:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^{21}$$

.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen für $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 = \mathrm{i}$$

(c) Bestimmen Sie sämtliche komplexe Lösungen der Gleichung:

$$\frac{z^2}{2} - \mathrm{i}z = \frac{3}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

Z11.2. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine reguläre Matrix S an, sodass $D = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch D an.

Tutorübungen

T11.1. Bestimmen Sie sämtliche komplexe Lösungen der folgenden Gleichungen. Skizzieren Sie im Anschluss die gewonnenen Lösungen in der komplexen Ebene.

(i) $z^6 = -729$

(ii) $z^3 = -2 - 2\mathrm{i}$

(iii) $z^2 - 2(2\mathrm{i}+1)z = 2 - 4i$

T11.2. Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte sowie zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die Eigenvektoren. Bestimmen Sie reguläre Matrizen S und T sowie deren Inverse S^{-1} und T^{-1}, so daß $S^{-1} A\, S$ und $T^{-1} B\, T$ Diagonalgestalt besitzen. Geben Sie diese Diagonalgestalt an.

T11.3. Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Schriftliche Übungen

S11.1. «Feierabend!» brüllt in zwölf Metern Höhe Zimmermann Karl Knüsel und schmeißt voller Elan seinen Hammer aus der Hand. Dieser verfehlt nur knapp die in ca. zwei Metern Entfernung auf der Außenmauer stehende Werkzeugkiste und nimmt seinen Weg in den Abgrund. Drei Meter tiefer verlegt Meister Walter Röhrich seit Tagen Kaltwasser und wartet auf ein paar Bleirohre («echte Vorkriegsqualität, das macht Ihnen heute keiner mehr»), die er erst gestern beim Aufräumen im Schuppen hinter der Werkstatt gefunden hat. Die Wartezeit vertreibt er sich am Fenster mit einem Stumpen und sieht daher den Hammer in ca. zwei Metern Entfernung vorbeifliegen. Zweieinhalb Meter tiefer inspiziert Herr Dipl. Ing. (FH) Hüpenbecker gerade ein unschönes kleines Loch in der Außenmauer («Da ist dem Stift letzte Woche der Schneidbrenner explodiert») und beobachtete dabei argwöhnisch den etwa drei Meter weiter vorübersausenden Hammer. Verstört nimmt er drei Streifen Tesafilm, einen alten Kaugummi, sowie eine Doppelseite der Bild-Zeitung und verschließt die Öffnung fachmännisch. Im Zwischengeschoß des Treppenhauses ist inzwischen Meister Röhrichs Geselle Eckhard angekommen und macht erst mal Pause. Leider muß er höllisch aufpassen, daß ihm das Bündel Rohre nicht gleich wieder die vier Meter nach unten rollt. Deshalb nimmt er auch nur aus dem Augenwinkel den ca. dreieinhalb Meter vor den eingeschlagenen Glasbausteinen vorüberschnellenden Hammer wahr. Etwa zweieinhalb Meter vor dem Haus sitzt seit einigen Minuten Baulöwe Günzelsen in seinem schnittigen Dubai V10 und passt auf, dass bloß keiner seiner Leute eher Schluss macht. Dabei sieht er in ungefähr acht Metern Höhe den Hammer über sich hinwegblitzen und überlegt, «dass es halt doch viel bequemer ist, auf dem Gehweg zu parken, als auf dem unnützen Seitenstreifen.»

(a) Mit x bezeichnen wir den Abstand des Hammers von der Hauswand (Abstände innerhalb des Grundrisses zählen negativ) und mit h seine gleichzeitige Höhe über SK (= «Straßenkante»). Bestimmen Sie alle Positionen (x, h), an denen der fallende Hammer beobachtet wurde und fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Positionen eintragen.

(b) Die Flugbahn des Hammers können wir durch eine Parabel

$$h(x) = a + bx + cx^2$$

beschreiben. Bestimmen Sie durch lineare Ausgleichrechnung die drei Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ und zeichnen Sie die Parabel in die Skizze ein.

(c) Mitten auf dem Zebrastreifen holt Oma Hansens neckischer kleiner Pitbull Franz-Ferdinand gerade zu einem freudigen Satz in Richtung andere Straßenseite aus, wo er den nichtsahnenden Briefträger Lümmermann entdeckt hat, mit dem er «bloß spielen» will. Leider bemerkt er den inzwischen rasend schnellen Hammer erst dann, als es bereits zu spät ist... In welchem Abstand von der Baustelle hätte Franz-Ferdinand (†) besser einen Schutzhelm getragen?

(d) Welche Größe wird bei dieser Methode minimiert? Tragen Sie die Abstände in Ihrer Skizze ein.

Die Tutoraufgaben werden am 13.1.2014 bis 16.1.2014 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Pellekoorne (1), Stoll (2), etc.) darauf.

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 12

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z12.1. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und hieraus eine orthogonale Matrix S, sodass $B = S^{-1} A\, S$ Diagonalgestalt besitzt.

Z12.2. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv bzw. surjektiv:

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x^2}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

(c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 : h(z) = |z|$

(d) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : k(n) = p_n,$ wobei p_n die n-te Primzahl sei.

Z12.3. Die Fibonacci-Folge ist wie folgt definiert:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n = 2, 3, \ldots$$

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Formel von Moivre-Binet

$$f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}},\ \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Tutorübungen

T12.1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -4/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie ihre algebraischen Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie alle zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Bestimmen Sie eine reguläre orthogonale Matrix S sowie deren Inverse S^{-1}, so daß $B = S^{-1} A\, S$ Diagonalgestalt besitzt. Geben Sie B an.

T12.2. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv bzw. surjektiv:

(a) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : f(x) = \frac{2\arctan(x)}{\pi}$

(b) $g_r :]0, 1[\to \mathbb{R}_0^+ : g_r(x) = r\tan(\frac{\pi}{2}x), r \in \mathbb{N}_0$

(c) $h : \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} : h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

(d) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : k(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

T12.3. Die rekursiv definierte Folge a_k, sei wie folgt gegeben:

$$a_0 = 3, \quad a_{k+1} = 3a_k + 2$$

(a) Berechnen Sie a_1 bis a_5.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die explizite Formel $a_k = 4(3^k) - 1$ mit der rekursiven Definition übereinstimmt.

Schriftliche Übungen

S12.1. (a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie alle Eigenwerte und die dazu gehörigen Eigenvektoren. Geben Sie eine reguläre Matrix S an, sodass $D = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Berechnen Sie S^{-1} und geben Sie D an.

(b) Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $(z - \mathrm{i})^4 = -1$ an. (Hinweis: Nicht ausmultiplizieren!)

Die Tutoraufgaben werden am 20.1.2014 bis 23.1.2014 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

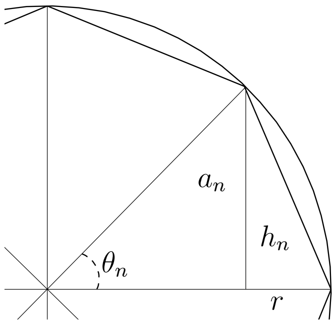
Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Pellekoorne (1), Stoll (2), etc.) darauf.

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 13

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z13.1. *Exhaustionsmethode von Antiphon, Teil I:* Seien K ein Kreis mit dem Radius $r > 0$ und $n \geq 2$. Wir betrachten das im Kreis einbeschriebene gleichseitige Vieleck mit 2^n Seiten und den Winkel θ_n sowie den Flächeninhalt a_n eines der 2^n Dreiecke wie in der Grafik dargestellt.



Berechnen Sie a_n in Abhängigkeit von r und θ_n. A_n sei die Fläche des ganzen Vielecks. Zeigen Sie, dass die Folge $(A_n)_{n\geq 2}$ monoton wachsend und beschränkt ist.
Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\sin(x) \leq x, x \geq 0$ und $\sin(x)$ ist monoton steigend im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Z13.2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+14n+3}{n^2+n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(1/n)$

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\cos(x) \geq 1 - x$ für $x \geq 0$.

Z13.3. Untersuchen Sie die Konvergenz der verallgemeinerten harmonischen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Hinweis: Teilen Sie die 2^k-te Partialsumme s_{2^k} in $k+1$ Termen ein:

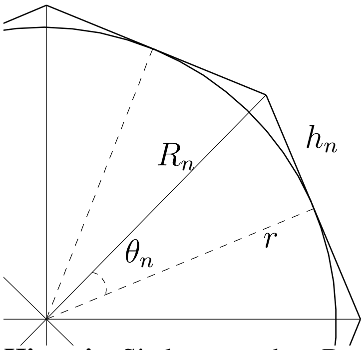
$$s_{2^2} = t_0 + t_1 + t_2 = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right),$$

und schätzen Sie jedes t_k ab.

Tutorübungen

T13.1. *Exhaustionsmethode von Antiphon, Teil II:* Wir approximieren jetzt die Oberfläche des Kreises aus Z13.1 von „Außen“, also als Inkreis eines gleichseitigen Vielecks. Wie vorher soll das Polygon 2^n

Seiten haben, $n \geq 2$, und θ_n bezeichne den Winkel wie in der Grafik dargestellt. Berechnen Sie b_n in Abhängigkeit vom Radius r und vom Winkel θ_n. Sei B_n die gesamte Fläche des Vielecks.



Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(B_n)_{n\geqslant 2}$ ist monoton fallend und beschränkt. Benutzen Sie die Tatsache, dass das Vieleck im Kreis vom Radius R_n einbeschrieben ist.

(b) Der Flächeninhalt eines Kreises ist πr^2. Benutzen Sie Teil I der Aufgabe aus der Zentralübung und schätzen Sie $B_{n-1} - A_n$ ab. Tipp: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$!

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\tan(x) \geq x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

T13.2. (a) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{4n^2 + n}.$$

(c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x^n, \text{ für } |x| < 1.$$

Hinweis: Beachten Sie $|x|^{-1} > 1$ und schreiben Sie $|x|^{-1} = (1 + t)$ für geeignetes t. Folgern Sie mit Hilfe der binomischen Formel, dass $|x|^{-n}$ unbeschränkt ist.

T13.3. Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergieren:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2014}{2^k}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Bonus: Für (a): Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Partialsumme $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ ist und folgern Sie daraus den Grenzwert der Reihe. Für (b) analog: $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Schriftliche Übungen

S13.1. (a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie alle Eigenwerte und die dazu gehörigen Eigenvektoren. Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, sodass $D = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Berechnen Sie S^{-1} und geben Sie D an.

(b) Geben Sie für die folgenden auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen einen möglichst großen Definitionsbereich, der die 0 enthält, und den dazu passenden Wertebereich an, sodass die Funktion bijektiv ist:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = (x + 1)^2 - 4$

(c) Wann ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $n \in \mathbb{N}$ diagonalisierbar?

Die Tutoraufgaben werden am 27.1.2014 bis 30.1.2014 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Pellekoorne (1), Stoll (2), etc.) darauf.

Höhere Mathematik I für Bau-, Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 14

Wintersemester 2013/2014

Zentralübung

Z14.1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$$

(a) Geben Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ an. Begründen Sie, dass die Funktion auf ihrem Defintionsbereich stetig und an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzbar ist.

(b) Prüfen Sie die Funktion auf Symmetrien und bestimmen Sie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Polen.

(c) Untersuchen Sie die stetig ergänzte Funktion auf Nullstellen und ihr Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$.

(d) Zeigen Sie die stetige Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 0$.

(e) Erstellen Sie eine Monotonietabelle und schließen Sie daraus auf lokale Extremstellen.

(f) Fertigen Sie eine Skizze an.

Z14.2. Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $a, b > 0$ mit Umfang $U = 4$. Bestimmen Sie a und b so, dass der Flächeninhalt maximal wird. Geben Sie diesen an.

Tutorübungen

T14.1. Zur Kurvendiskussion bestimme man für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2} - \frac{3x^3}{1-x^3}$$

(a) nach *stetiger Ergänzung* den maximalen Definitionsbereich,

(b) alle reellen Nullstellen und die *Vorzeichentabelle*

(c) alle Asymptoten

und fertige eine Skizze des Graphen $y = f(x)$ an.

T14.2. Bestimmen Sie die Maxima und Minima der folgenden Funktionen

(a) $f_\alpha : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-x^2+4x+\alpha}$ abhängig vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $g : [-1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x$.

(c) $h : [-1,1] \to [0,\pi]$, $h(x) = \arccos(x)$.

T14.3. Ein Läufer legt 10000m in genau 30 [Minuten] zurück. Dabei ist seine Weg-Zeit-Funktion $s(t)$, $t \in [0, 30]$ ($s(t) =$ in der Zeit von 0 bis t zurückgelegte Strecke) stetig.

Zeigen Sie: Es gibt ein Zeitintervall $I \subset [0, 30]$ der Länge 3, in dem der Läufer genau 1000m zurückgelegt hat.

Hinweis: Weisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes die Existenz einer Nullstelle der Hilfsfunktion $h(t) = s(t + 3) - s(t) - 1000$, $t \in [0, 27]$ nach.

Die Tutoraufgaben werden am 3.2.2014 bis 6.2.2014 besprochen.