

---

# SOBRE UN PROBLEMA DE CONTACTO EN ELASTICIDAD

---

*Memoria presentada por Miguel de Benito Delgado  
como Trabajo de Fin de Grado en CC. Matemáticas por la UCM*

*bajo la tutela académica de*

*Jesús Ildefonso Díaz Díaz, catedrático del  
Departamento de Matemática Aplicada de la UCM.*



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Múnich, Madrid, 3 de julio de 2012



ÍNDICE

**1. Introducción** . . . . . 1

**2. Teoría clásica de la elasticidad** . . . . . 3

    2.1. Ecuaciones del movimiento . . . . . 3

    2.2. El potencial elástico . . . . . 4

    2.3. Linealización . . . . . 6

    2.4. Material isótropo y homogéneo . . . . . 7

    2.5. El caso escalar . . . . . 8

    2.6. El problema estático . . . . . 9

        2.6.1. La formulación débil . . . . . 9

        2.6.2. Existencia y unicidad de solución . . . . . 10

        2.6.3. Equivalencia para soluciones suaves . . . . . 11

**3. El problema de Signorini** . . . . . 13

    3.1. Ecuaciones . . . . . 13

    3.2. Deducción de las condiciones de contorno . . . . . 15

    3.3. La formulación débil . . . . . 16

        3.3.1. Equivalencia para soluciones suaves . . . . . 17

        3.3.2. Existencia y unicidad de solución . . . . . 18

        3.3.3. Regularidad de la solución . . . . . 18

    3.4. El caso escalar . . . . . 19

**4. Estimaciones de la región de coincidencia** . . . . . 21

    4.1. El caso vectorial . . . . . 21

    4.2. El caso escalar . . . . . 23

**Apéndice A.** . . . . . 29

    A.1. Movimientos rígidos . . . . . 29

    A.2. Espacios de Sobolev y teorema de la traza . . . . . 30

    A.3. Existencia y unicidad de soluciones . . . . . 33

    A.4. La desigualdad de Korn . . . . . 36

    A.5. Otros resultados del análisis funcional . . . . . 44

    A.6. Un  $\varepsilon$  de Historia . . . . . 45

    A.7. Comentarios sobre las fuentes . . . . . 46

**Bibliografía** . . . . . 49



# Sobre un problema de contacto en elasticidad

RESUMEN. Tras un breve repaso de la teoría lineal de la elasticidad, estudiamos el problema clásico que se ocupa del equilibrio estacionario de un sólido elástico reposando sobre una superficie sin rozamiento (*problema de Signorini*). El rasgo esencial de dicho problema son unas condiciones de contorno *unilaterales* que lo convierten en uno no lineal y representan el desconocimiento de dónde se produce contacto y por tanto están dadas en regiones desconocidas a priori. La *región de coincidencia*, donde las desigualdades que modelan esta falta de información se transforman en igualdades, se estudia en el caso vectorial y en el escalar desde dos puntos de vista en una sección posterior. Terminan unos apéndices con resultados y conceptos necesarios de espacios de Sobolev y problemas variacionales. Para el estudio de la existencia y unicidad de soluciones del problema elíptico se ha añadido una sección dedicada a la coercitividad de las formas bilineales implicadas, donde la herramienta fundamental es la desigualdad de Korn, demostrada gracias a un resultado de regularidad para distribuciones. Completan los apéndices otros temas generales empleados en el texto así como unos escuetos apuntes históricos.

ABSTRACT. After a quick review of linear elasticity theory, we study the classical problem which considers the stationary equilibrium of an elastic body resting on a frictionless surface (*Signorini problem*). Its essential property is found in the *unilateral* boundary conditions given in subsets of the boundary unknown a priori which model the lack of knowledge about the region where contact happens and make the problem non-linear. The *coincidence set*, where the inequalities defining the boundary conditions become equalities, is then studied in both the vectorial and the scalar settings from two viewpoints. There follows a collection of appendices with the necessary results and concepts from Sobolev spaces theory and variational inequalities. For the study of existence and uniqueness of solution to the elliptic problem we added a section on the coercivity of the relevant bilinear forms, the fundamental tool being a form of Korn's inequality which is proven using a general regularity result for distributions. We finish with some general questions needed throughout the text and some brief historical notes.



## 1. INTRODUCCIÓN

Este texto es el resultado de mi introducción al estudio de ciertas propiedades cualitativas de las soluciones de un problema concreto en *mecánica de contacto*. Esta parte de la física de los sólidos se ocupa del contacto estático o dinámico entre cuerpos elásticos de distintas clases<sup>1</sup> y es una disciplina de innumerables aplicaciones en ingeniería que presenta problemas de gran dificultad matemática. Gran parte de esta estriba en la aparición de fenómenos no lineales de *frontera libre* en las ecuaciones, es decir de subconjuntos del dominio en los cuales las condiciones no se conocen a priori. Un ejemplo es el problema clásico de Stefan para la fusión del hielo (se busca la distribución de temperatura en un medio homogéneo que experimenta una transición de fase), donde la región del espacio en la que el hielo se funde es determinada dinámicamente por la solución de la ecuación. En este trabajo se estudia el *problema de Signorini*: un sólido (linealmente) elástico en equilibrio estático sobre una superficie rígida; la región desconocida es aquella de la frontera del objeto en la cual ocurre contacto y en el caso más sencillo esto se expresa como que la solución se anula.

El contenido principal de los teoremas centrales, en la sección 4, es de tipo cualitativo. Un teorema de Kinderlehrer [Kin81, Teorema 4] proporciona primero cierta tranquilidad respecto a la validez física del modelo puesto que afirma que las fuerzas actuando sobre un cuerpo y las de reacción en la zona de contacto se equilibran. Pero también se sigue de él que no es posible que un cuerpo  $N$ -dimensional deformado se encuentre en equilibrio dinámico sobre una variedad de dimensión  $N - 2$ : una pelota no puede estar en equilibrio sobre un subconjunto de uno o varios puntos de una superficie.

Los teoremas de Díaz [Día80] y Díaz y Jiménez [DJ88] en la sección 4.2, van en otra dirección: encuentran condiciones (intuitivamente claras) sobre los datos que permiten dar estimaciones sobre regiones del borde en las que la solución se anula. La ecuación (escalar) que se considera en este caso es

$$-\Delta u + \alpha u = f,$$

junto con ciertas condiciones de contorno que modelan el posible contacto. Lo que los teoremas afirman, es que aquellas regiones de la frontera cerca de las cuales la fuerza aplicada no supera cierto umbral dejarán de tocar el obstáculo. Esto puede ilustrarse con el siguiente experimento casero.

Considérese una balleta húmeda sujeta sobre un soporte anular, como un molde de cocina, al que ha sido sujeta con holgura mediante hilos (figuras 1 y 2). La balleta se comba por la acción de la gravedad, única fuerza  $f \ll 1$  que actúa sobre ella y el contacto se produce en todo el borde tal y como cabe esperar y el teorema predice. Desde abajo se aplica otra fuerza en forma de aire frío con un secador de pelo ajustado para un chorro de foco pequeño: gracias a que la superficie en la que impacta el aire es pequeña con respecto a la de la balleta, podemos simular *grosso modo* efectos locales en el término independiente  $f$  de la ecuación. Si nos acercamos (sin tocar) al borde contrarrestando la gravedad con el aire,  $f$  caerá localmente por debajo del umbral y la balleta se levantará (figura 3).

---

1. *Elásticos*: sin deformaciones permanentes; *viscoelásticos*: cuyas propiedades elásticas dependen de la temperatura, el tiempo o la frecuencia de aplicación de las fuerzas; o *plásticos*: no recuperan la configuración de referencia tras desaparecer las fuerzas.



**Figura 1.** Materiales.



**Figura 2.** Montaje.



**Figura 3.** Resultado.

En el modelo de la elasticidad que empleamos surgen ecuaciones de tipo elíptico y para su estudio se ha incluido la parte estrictamente necesaria de la teoría de ecuaciones variacionales y espacios de Sobolev. Se han incluido asimismo algunos resultados de existencia y unicidad clásicos, así como una larga demostración de la desigualdad de Korn, clave en la demostración de existencia. Por otra parte, aunque en el análisis matemático de cualquier modelo físico es fundamental el estudio de la regularidad de las soluciones como función de la de los datos, esta cuestión es en general de gran dificultad técnica, especialmente en cuanto se relajen las condiciones de suavidad del dominio. Por esto hemos elegido simplemente citar un resultado de Kinderlehrer dejando la demostración de lado.<sup>2</sup> Nos restringimos además siempre al caso de una frontera regular de clase  $C^1$ , lo que simplifica muchas demostraciones, en especial las del apartado técnico de los apéndices.

Éstas y el resto de técnicas empleadas son de uso general en muchas aplicaciones de ecuaciones en derivadas parciales y por tanto su estudio ha representado para mí una mirada algo más de cerca a un campo apasionante que probablemente me ocupe durante los próximos años. Es por esto que he de subrayar que le debo la idea de estudiar este problema al profesor Jesús Ildefonso Díaz Díaz, quien pese a la lejanía entre Múnich, donde resido, y Madrid se ofreció a dirigir este trabajo y me introdujo en un campo interesante y con aplicaciones directas. Pese a lo irregular de mis visitas a España y sus muchas tareas he visto respondidas mis preguntas en todo momento. A él le debo también la gentileza de haber preparado y documentado el pequeño experimento casero de más arriba que ilustra uno de los teoremas centrales del texto.

La otra persona a quien le debo mucho es Ana Cañizares, mi compañera en la vida y en las matemáticas, quien ha leído varias versiones del texto con paciencia y con sus correcciones y constantes discusiones me ha ayudado, como siempre hace, a avanzar.

Pero este texto existe gracias a más gente de modo directo. A mi profesor y amigo Baldomero Rubio le debo apoyo y consejos constantes, así como haberme animado a entrar en contacto con Ildefonso y el campo de las EDPs. Por último, para la elaboración de este trabajo he empleado exclusivamente la herramienta de edición científica  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}_{\text{MACS}}$  y a sus desarrolladores y su comunidad les debo sus miles de horas de esfuerzo que me permiten trabajar cada día cómoda y rápidamente.

<sup>2</sup>. Dicha demostración sigue no obstante una técnica habitual de cocientes incrementales debida a Nirenberg que se puede encontrar además de en el artículo de Kinderlehrer [Kin81], en los textos estándar como [Eva10].

## 2. TEORÍA CLÁSICA DE LA ELASTICIDAD

En esta sección introductoria repasamos sin demasiado detalle la teoría de la elasticidad lineal: el objetivo es modelar la deformación de un sólido **anisótropo** (el efecto de las fuerzas depende de la dirección) y **no homogéneo** (la densidad y propiedades del material dependen de la posición dentro del cuerpo), sin tener en cuenta efectos termodinámicos y suponiendo que las deformaciones en las que incurre el cuerpo al ser sometido a fuerzas externas son de pequeña índole. Desarrollaremos esta suposición en la sección 2.3, lo que conducirá a unas ecuaciones lineales y permitirá aplicar los resultados generales de existencia de la sección A.3. En una primera aproximación supondremos todas las funciones y dominios tan suaves como sea necesario para dotar de sentido las expresiones que se escribirán.

Llamamos **configuración de referencia** a la configuración espacial del cuerpo sin someter a fuerzas externas y designamos mediante  $\Omega$  la región de  $\mathbb{R}^N$  que éste ocupa en dicha configuración y con  $\Gamma = \partial\Omega$  su frontera, que supondremos por lo general al menos de clase  $C^1$ . Para describir la deformación empleamos **coordenadas Lagrangianas** o **materiales**, es decir con respecto a la configuración de referencia, y las designamos con letras minúsculas  $x$ .

La deformación del cuerpo puede describirse mediante un **campo de deformaciones**  $(t, x) \mapsto y(t, x)$  o un **campo de desplazamientos**  $(t, x) \mapsto u(t, x) := y(t, x) - x$ . Será este último el que se busque determinar mediante las ecuaciones.

### 2.1. Ecuaciones del movimiento.

Para llegar a unas ecuaciones que describan las deformaciones partiremos de la ley de conservación del momento<sup>3</sup>, teniendo en cuenta tanto las fuerzas externas que actúan sobre todo el volumen, por ejemplo gravedad o campo electromagnético, como las internas de cohesión en el material.

Estas últimas se describen por medio del **primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff**<sup>4</sup>: imaginando  $\Omega$  dividido en dos partes  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  por una superficie  $\Lambda$ , suponemos que el dominio deformado  $y(\Omega_2)$  ejerce una fuerza a través de la superficie deformada  $y(\Lambda)$  sobre el dominio deformado  $y(\Omega_1)$ . Según este principio y con el teorema de Cauchy<sup>5</sup>, esta fuerza puede ser descrita por una medida de superficie, absolutamente continua respecto a la de Lebesgue, que depende únicamente de la normal en cada punto de  $\Lambda$  y además *de forma lineal*, es decir que existe un (0,2)-tensor  $\sigma$ , de componentes  $\sigma_{ij}$ , tal que  $\int_{\Lambda} d\mu = \int_{\Lambda} \sigma(\nu_x) ds_x$ . Tenemos entonces:

$$F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1} = \int_{\Lambda} \sigma \nu ds_x,$$

donde  $\nu$  es la normal en cada punto de  $\Lambda$  en dirección a  $\Omega_2$ .

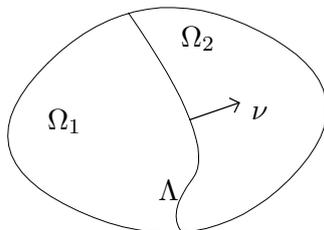


Figura 4. El tensor de esfuerzos.

3. Momento lineal, es decir  $\frac{d}{dt}(m v) = F$ . (cf. [DL76, Nota 1, p.1])

4. *Tensor de esfuerzos de Cauchy*, si se trabaja en coordenadas de Euler o espaciales.

5. Axioma y teorema de Cauchy, [TM05, §§ 3.1, 3.2].

Una definición alternativa del tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff se encuentra en [TM05] como aquel tensor  $\Pi(t, x)$  que para todo tiempo permite calcular las fuerzas de cohesión entre dos subconjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  en la configuración de referencia separados por una superficie  $\Lambda$ , empleando la normal en  $t = 0$ :

$$\int_{\Lambda} \Pi(t, x) \nu(t, x) ds_x.$$

La demostración de existencia de este tensor es un cambio de variables «atrás en el tiempo» usando el desplazamiento inverso y resulta en una especie de conjugación del tensor de Cauchy en coordenadas espaciales:

$$\Pi = (\det Du) \bar{\sigma} (D^{-1} u)^\top.$$

Ha de observarse que aunque esto es aparentemente igual al caso de coordenadas espaciales, aquí se trabaja siempre en la configuración de referencia, lo que tendrá por consecuencia unas ecuaciones del movimiento más sencillas. En particular, a partir del teorema de conservación del momento<sup>6</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u_{,t} dx = \int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} \sigma \nu ds_x,$$

derivando bajo el signo integral y aplicando el teorema de Gauß, queda:

$$\int_{\Omega} \rho u_{,tt} dx = \int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} \sigma \nu ds_x = \int_{\Omega} f + \operatorname{div} \sigma dx,$$

o bien

$$\int_{\Omega} (\rho u_{,tt} - \operatorname{div} \sigma - f) dx = 0.$$

Puesto que esta ecuación se cumple también para cada subconjunto de  $\Omega$ , se sigue la formulación diferencial

$$\rho u_{,tt} - \operatorname{div} \sigma = f. \quad (1)$$

Obsérvese que, al contrario que en el caso de coordenadas espaciales, las ecuaciones se obtienen sin recurso al teorema de transporte de Reynolds<sup>7</sup> y por tanto sin término convectivo (es decir: no aparece un término de la forma  $u \cdot \nabla u$  representando la aceleración de la deformación en función de la posición).

## 2.2. El potencial elástico.

Para determinar  $\sigma$  se necesita una *ley constitutiva* del material. Una suposición natural es que las deformaciones desaparecen al hacerlo las fuerzas que las causan<sup>8</sup> y bajo ésta, dicha ley se obtiene introduciendo el denominado **potencial elástico**  $e$  del material para

6. El primer término representa el cambio en el tiempo del impulso, el segundo las fuerzas de volumen en  $\Omega$  y el tercero las fuerzas de superficie en  $\partial\Omega$  (aquí el exterior de  $\Omega$  juega el papel de la segunda región  $\Omega_2$  en los razonamientos anteriores y  $\Lambda$  es ahora  $\partial\Omega$ ).

7. **Teorema de Reynolds.** Para una variable física  $\varphi$  en coordenadas Eulerianas, se cumple

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi(t, x) dx = \int_{\Omega(t)} [\partial_t \varphi(t, x) + \operatorname{div} (\varphi(t, x) \cdot u_{,t}(t, x))] dx.$$

8. Se trata de materiales denominados *elásticos* o *sin memoria*, que son de interés en ingeniería puesto que generalmente se espera de estos un comportamiento predecible, es decir que cómo reaccionen en el futuro no debe depender de la carga (las deformaciones) a las que han sido sometidos en el pasado. Cf. [DL76].

modelar su capacidad de realizar el trabajo de volver a la configuración de referencia: puede entenderse que el proceso de deformación «acumula energía» en el material y que esta hará que vuelva a la configuración de referencia una vez desaparezcan las fuerzas externas. Partimos de la ecuación de conservación de la energía<sup>9</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho |u_{,t}|^2 + e \right) dx = \int_{\Omega} f \cdot u_{,t} dx + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot u_{,t} ds_x,$$

donde el primer integrando representa el cambio en el tiempo del trabajo realizado en el volumen  $\Omega$ , el segundo el trabajo realizado por las fuerzas de volumen y el tercero el realizado por las de superficie. Derivando bajo el signo integral, usando (1), el teorema de Gauss y que  $g(u) = |u| = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{1/2} \Rightarrow g'(u) = \frac{u}{|u|}$ , junto con  $\partial_t \frac{1}{2} f(g(u)) = \frac{1}{2} f'(g(u)) g'(u) u_{,t}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho |u_{,t}| u_{,t} |u_{,t}|^{-1} \cdot u_{,tt} + e_{,t}) dx &= \int_{\Omega} \overbrace{(\rho u_{,tt} - \operatorname{div} \sigma)}^{=f} \cdot u_{,t} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\sigma u_{,t}) dx \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \rho u_{,t} \cdot u_{,tt} + e_{,t} dx &= \int_{\Omega} \rho u_{,tt} \cdot u_{,t} - (\operatorname{div} \sigma) \cdot u_{,t} + \operatorname{div} (\sigma u_{,t}) dx \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} e_{,t} dx &= \int_{\Omega} -\sigma_{ij,j} u_{i,t} + (\sigma_{ij} u_{j,t})_{,i} dx \\ &= \int_{\Omega} -\sigma_{ij,j} u_{i,t} + \sigma_{ij,i} u_{j,t} + \sigma_{ij} u_{j,it} dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{j,it} dx. \end{aligned}$$

Y de nuevo debido a que  $\Omega$  puede ser arbitrario, resulta

$$e_{,t} - \sigma_{ij} u_{i,jt} = 0. \quad (2)$$

Aunque la densidad de energía en principio podría ser una función de  $t, x, u, Du$ , esta ecuación y la libertad de escoger  $f$  en (1) implican que en realidad sólo lo es de  $x$  y  $Du$ . Para ver esto desarrollemos primero (2) poniendo  $e = e(t, x, u, Du)$  y usando la regla de la cadena:

$$0 = e_{,t} + e_{,u_i} u_{i,t} + e_{,u_i,j} u_{i,jt} - \sigma_{ij} u_{i,jt}$$

1. *e no depende de t*: para  $f = 0$ , cualquier función constante  $u$  es solución de (1). Entonces todos los sumandos son cero salvo el primero:  $0 = e_{,t}$ .
2. *e no depende de u*: de nuevo con  $f = 0$ , las funciones  $u = (0, \dots, t, \dots, 0)$  con sólo la  $i$ -ésima componente distinta de cero son soluciones. En este caso desaparecen todos los sumandos salvo  $e_{,u_i} u_{i,t} = e_{,u_i} = 0$  (no hay suma) para cada  $i$ .

Tenemos entonces la fórmula

$$\sigma_{ij}(u) = e_{,u_i,j}(x, Du) \quad (3)$$

y se dice en general que un material es **hiperelástico** cuando el tensor de esfuerzos solamente depende de la posición y del gradiente de deformaciones y además existe una función de energía  $e = e(x, Du)$  que cumple la fórmula anterior.

<sup>9</sup> Obsérvese que, como avisábamos al principio, no estamos incluyendo en el modelo la posible contribución de la temperatura al balance de energías. De hecho la de ningún otro fenómeno. Por ejemplo, de incluir el campo eléctrico la ley constitutiva incluye un tensor adicional actuando sobre éste. Cf. [DL76].

### 2.3. Linealización.

Hasta aquí hemos desarrollado una teoría general que ha conducido a ecuaciones no lineales, como se ve en la expresión del tensor  $\sigma$  dada en (3), que en principio combina arbitrariamente las derivadas del campo de deformaciones. Podemos arreglar esto y obtener una expresión relativamente sencilla para  $\sigma$  mediante un procedimiento de linealización pero esto necesita suponer desplazamientos pequeños y tiene varias implicaciones tanto físicas como matemáticas. En primer lugar implica que el modelo, aunque válido en muchas aplicaciones prácticas, deja de servir cuando las deformaciones son grandes: a partir de cierto punto la relación entre esfuerzos y deformaciones deja de ser lineal y el material puede exhibir un comportamiento plástico deformándose irreversiblemente. En segundo lugar surge la dificultad de probar la validez de las aproximaciones que se hacen. Los teoremas de convergencia necesarios no son siempre adecuados o simplemente no existen y por eso se emplean a menudo principios empíricos denominados *criterios de límite de elasticidad* que indican cuándo un material se acerca al punto en que deja de ser elástico (cf. [TM05, §13.4]).

Para la linealización primero aproximamos la amplitud y dirección de las deformaciones: se llama **gradiente de deformaciones** a la matriz diferencial de la deformación  $y$ . Las parciales  $\partial_i y$  son una base del espacio tangente a  $y(x)$  de modo que cuan lejos estén de ser una base ortonormal constituye una medida local de la deformación. En un punto  $x$  el desarrollo de Taylor proporciona, despreciando términos de segundo o mayor orden,

$$|y(x+b) - y(x)| \simeq |Dy(x)b| = (b^\top D^\top y(x) Dy(x)b)^{1/2}.$$

Por tanto, la matriz siguiente describe localmente la amplitud de las deformaciones:

$$C := D^\top y Dy = (I + Du)^\top (I + Du)$$

y se denomina **tensor derecho de deformaciones de Cauchy-Green**. Una caracterización de los movimientos sin deformación (o *movimientos rígidos*, cf. sección A.1) se tiene con el **tensor de deformaciones de Green-St.Venant**:

$$G = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(Du + D^\top u + D^\top u Du),$$

que es igual a cero cuando  $C = I$  y entonces todos los sumandos se cancelan, lo que representa una ausencia de cambio en las distancias entre puntos de  $\Omega$ .<sup>10</sup>

En este primer paso de linealización (geométrica) el término no lineal  $D^\top u Du$  se desprecia y se define el **tensor linealizado de deformaciones**, de componentes

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4)$$

Para el segundo paso de linealización necesitamos una ley constitutiva lineal. Como decíamos en la sección 2.1,  $\sigma \nu$  representa la fuerza por unidad de superficie en un punto, pero debido a la introducción del potencial elástico y la utilización de la ecuación de conservación de la energía, vemos que el tensor  $\sigma$  depende del desplazamiento  $u$  en lugar del punto. Esta relación con el desplazamiento pone de manifiesto una relación intuitiva con la expresión elemental (lineal) de la energía potencial para un muelle unidimensional: la ley de Hooke es  $F = -kx$  y el trabajo realizado por un muelle es entonces  $\int F dx = \frac{1}{2}ax^2$ , con  $a = -k$ . Esto se generaliza al potencial elástico con la forma cuadrática (cf. (3))

$$e(x; u) = \frac{1}{2}a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(u), \quad (5)$$

<sup>10</sup>. Puesto que la matriz  $Q$  de una rotación en un movimiento rígido es ortogonal,  $Q^\top = Q^{-1}$  y entonces  $G = 0$ .

y entonces derivando esto como en (3) se obtiene lo que se denomina **ley de Hooke** (generalizada) y se expresa<sup>11</sup>

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u). \quad (6)$$

El (0,4)-tensor  $a$  se denomina **tensor de Hooke** y aunque en principio parece contar con  $d^4$  coeficientes, muchos son iguales ya que tiene las siguientes simetrías:

$$a_{ijkl} = a_{jilk} = a_{klij}. \quad (7)$$

Estas simetrías no son ninguna restricción al modelo: en  $\mathbb{R}^3$  por ejemplo son necesarios en realidad «solamente» 21 números distintos en lugar de 81: puesto que  $\varepsilon$  es simétrico tiene sólo 6 coeficientes y una forma cuadrática en  $\mathbb{R}^6$  está caracterizada por 21 coeficientes independientes, de modo que ésta es la cantidad de  $a_{ijkl}$  distintos que hacen falta.<sup>12</sup> Obsérvese que como consecuencia de (7) el tensor de esfuerzos en la ley de Hooke es simétrico:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (8)$$

aunque esta simetría también se obtiene como consecuencia del teorema de conservación del momento angular (cf. [TM05]). Usando ahora (8) y además (6) resulta la siguiente expresión, que será de utilidad más adelante:

$$a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) \stackrel{(6)}{=} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \stackrel{(8)}{=} \sigma_{ij}(u) v_{i,j}. \quad (9)$$

## 2.4. Material isótropo y homogéneo.

En mecánica de medios continuos la isotropía de un material se caracteriza por la invarianza de su ley constitutiva por cambios del sistema de referencia, es decir por la *independencia de  $\sigma$  respecto del observador*:<sup>13</sup> para toda transformación afín de las coordenadas  $x^* = a + Qx$  con  $Q$  constante y ortogonal de determinante 1 ha de cumplirse

$$\sigma^* = Q \sigma Q^\top.$$

Es decir

$$\sigma^* = \hat{\sigma}(x^*, D_{x^*} u^*) = Q \hat{\sigma}(x, Du) Q^\top = Q \sigma Q^\top.$$

Aplicando esto y el teorema 11 a (6) se obtiene

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}(u). \quad (10)$$

$\lambda$  y  $\mu$  se llaman **coeficientes de Lamé** del material y con estos el tensor de Hooke es

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Dichos coeficientes pueden depender de la posición, el tiempo o la temperatura pero generalmente se suponen constantes en una primera aproximación.<sup>14</sup>

11. Ponemos  $w_{ij} = u_{i,j}$  y tenemos:  $\sigma_{ij}(u) = e_{,w_{ij}}(Du) = \partial_{w_{ij}} \left( \frac{1}{2} a_{rskl}(x) \varepsilon_{rs}(u) \varepsilon_{kl}(u) \right) = \frac{1}{8} a_{rskl}(x) \partial_{w_{ij}} [(w_{rs} + w_{sr})(w_{kl} + w_{lk})] = \frac{1}{8} a_{rskl} [(\partial_{w_{ij}} w_{rs} + \partial_{w_{ij}} w_{sr}) + (w_{rs} + w_{sr})(\partial_{w_{ij}} w_{kl} + \partial_{w_{ij}} w_{lk})] = \frac{1}{8} [a_{ijkl} + a_{jikl}] (w_{kl} + w_{lk}) + \frac{1}{8} [a_{rsij} + a_{rsji}] (w_{rs} + w_{sr}) = \frac{1}{4} a_{ijkl} (w_{kl} + w_{lk}) + \frac{1}{4} a_{jikl} (w_{kl} + w_{lk}) = \frac{1}{2} a_{ijkl} (w_{kl} + w_{lk}) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ .

12. Visto de otra manera: como  $\varepsilon$  tiene sólo 6 coeficientes, para calcular  $e$  hacen falta 36 números distintos, pero ya que  $\varepsilon_{ij}$  y  $\varepsilon_{kl}$  pueden intercambiarse sin que ello afecte a la energía,  $a$  ha de ser simétrico con respecto a las parejas  $ij$  y  $kl$ , lo que reduce el número a 21. Esto se aplica a un material con el mínimo número de simetrías posible, pero se reduce hasta 3 números distintos en el caso de un cristal cúbico o a dos en el caso de un material isótropo, como veremos en la siguiente sección. (cf. [FLS65, §31.7])

13. Cf. [EGK11, §5.8] y [Alt12].

14. Cf. [TM05, §13.1]. Puede encontrarse más información sobre los coeficientes de elasticidad en [TM05, §13.2 y p.179].

Usando (4) y (10), la ecuación (1) es ahora por componentes

$$\begin{aligned} f_i &= u_{i,tt} - \sigma_{ij,j} \stackrel{(10),(4)}{=} u_{i,tt} - \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} - \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) \\ &= u_{i,tt} - \lambda u_{k,ki} - \mu u_{i,jj} - \mu \overbrace{u_{j,ij}}^{=u_{j,ji}} \\ &= u_{i,tt} - (\lambda + \mu) u_{j,ji} - \mu \Delta u_i. \end{aligned}$$

O mejor:

$$u_{,tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u = f. \quad (11)$$

## 2.5. El caso escalar.

En las secciones precedentes se ha desarrollado un modelo con un vector de deformaciones en  $\mathbb{R}^N$ . No obstante, la suposición de pequeños desplazamientos y la consideración de materiales o problemas en los cuales la dirección principal de desplazamiento (aquella ortogonal a la superficie  $\Sigma$ ) es la única relevante, permiten remplazar la ecuación por una escalar. Un ejemplo típico es la deformación vertical de una membrana sujeta por su borde, como en el ejemplo de la introducción. En este contexto se desarrollan los trabajos de Díaz [Día80] y Díaz y Jiménez [DJ88], en los cuales el problema es además planteado para un sólido isótropo y homogéneo y por eso es lo que supondremos aquí.

Imaginemos la situación de la membrana en  $\mathbb{R}^3$ . Si únicamente actúa la fuerza de la gravedad  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  es razonable suponer que los desplazamientos ocurran sólo en la vertical y además no dependan más que de la posición de cada punto  $(x, y)$  en la membrana, es decir, que sean  $\mathbf{u} = (0, 0, u(x, y))$ . Inmediatamente vemos que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  y entonces el sistema (11) es

$$\mathbf{u}_{,tt} - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g},$$

el cual a su vez se reduce a la ecuación escalar

$$u_{,tt} - \mu \Delta_{x,y} u = g. \quad (12)$$

Cabe observar que el camino que hemos seguido para llegar hasta la ecuación (12), partiendo del axioma de Cauchy, pasando por los tensores de deformaciones y esfuerzos y el potencial elástico, para después considerar movimientos solamente verticales, es uno que data de mediados del siglo XIX. No obstante, el problema de la membrana había sido estudiado más de un siglo antes empleando técnicas del cálculo de variaciones y mecánica Lagrangiana. En el libro de Troutman,<sup>15</sup> §8.9, puede encontrarse un sencillo argumento que conduce a la misma ecuación. Se definen la energía cinética

$$T(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u_t^2 dx$$

y la potencial elástica (debida al estiramiento lateral por unidad de área)

$$U(u) = \int_{\Omega} \tau \left( \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1 \right) dx - \int_{\Omega} p u dx,$$

donde  $\tau$  es la distribución de tensiones y  $p$  la de presión. Al lagrangiano correspondiente  $T - U$  se aplica el principio de Hamilton: entre dos tiempos en los cuales la posición de la membrana está dada, ésta ha de ejecutar el movimiento que hace estacionaria la integral

$$A(u) = \int_{t_1}^{t_2} T(u) - U(u) dt$$

<sup>15</sup>. John L. Troutman, *Variational calculus and optimal control*, 2ª ed., Springer, 1996.

entre los movimientos admisibles

$$V = \{u \in C^2([t_1, t_2] \times \Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0, u(t_1, x) \text{ y } u(t_2, x) \text{ dados}\}.$$

El principio de Maupertuis y una linealización suponiendo que  $u_x^2 + u_y^2 \ll 1$  conducen finalmente a la ecuación

$$(\rho u_t)_t - (\tau u_x)_x - (\tau u_y)_y = p, \quad t \geq t_1, x \in \Omega,$$

que cuando  $\rho$  y  $\tau$  son constantes es la ecuación (12).

## 2.6. El problema estático.

Modelamos igual que hasta ahora un sólido elástico, anisótropo y no homogéneo, bajo la suposición de desplazamientos pequeños (linealización respecto a  $u$ ) pero consideramos el caso límite del equilibrio, es decir  $u_{,t} = u_{,tt} = 0$ , y buscamos soluciones no necesariamente suaves, aunque para empezar seguimos suponiendo todas las funciones suficientemente regulares. Como condiciones de contorno,<sup>16</sup> supongamos dadas unas fuerzas de superficie  $g$  en un subconjunto abierto  $\Gamma_g \subset \Gamma$  y unos desplazamientos  $U$  en  $\Gamma_U = \text{Int}(\Gamma \setminus \Gamma_g)$ .<sup>17</sup> Sea  $A$  el operador diferencial de segundo orden definido por

$$Au := -\text{div}(\sigma(u)) = -\sigma_{ij,j}.$$

El problema en su versión clásica es el siguiente:

**Problema 1.** Sean  $f \in C(\Omega)$  y  $U, g \in C(\Gamma)$ . Encuéntrese  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , tal que

$$\begin{cases} Au = f & \text{en } \Omega, \\ u = U & \text{en } \Gamma_U, \\ \sigma \nu = g & \text{en } \Gamma_g. \end{cases} \quad (13)$$

### 2.6.1. La formulación débil.

Como es habitual, buscamos un nuevo marco en el que plantear el problema 1, relajando las condiciones sobre los datos y ampliando el espacio en el que se busca la solución. Esto tiene como consecuencia que los resultados generales de la sección A.3 pueden emplearse para demostrar que el problema está bien planteado, es decir que tiene solución y es única. Posteriormente debe comprobarse que las soluciones así «encontradas» poseen las propiedades de regularidad que cabe esperar de soluciones con significado físico.<sup>18</sup>

Definimos la forma bilineal correspondiente al trabajo (recuérdese que la energía cinética es cero) así:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} e(Du; Dv) dx \stackrel{(5)}{=} \int_{\Omega} a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx,$$

e integrando por partes resulta

$$\begin{aligned} a(u, v) &\stackrel{(9)}{=} \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} dx \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i \nu_j ds_x - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i dx \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i \nu_j ds_x + \int_{\Omega} (Au)_i v_i dx. \end{aligned} \quad (14)$$

16. Recuérdese que estudiamos el caso estático así que no hay condiciones iniciales que considerar.

17. Elegimos de este modo  $\Gamma_g$  y  $\Gamma_U$  por consistencia con las condiciones necesarias para el teorema de regularidad de las soluciones que damos en la sección 3.3.3.

18. Esto último es una tarea complicada que depende mucho de la regularidad del dominio y que se sale de lo abarcable en este trabajo. Para el caso de bordes suaves como los que consideramos puede consultarse [Eva10, §6.3].

Empezamos suponiendo todos los datos suficientemente suaves y multiplicamos la primera ecuación de (13) por  $v - u$ , siendo  $v$  una función  $v \in \mathbf{C}^2(\Omega)$  tal que  $v = U$  en  $\Gamma_U$ . Obtenemos

$$\int_{\Omega} Au \cdot (v - u) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, dx$$

y substituyendo esto en (14) resulta, usando las condiciones de contorno del problema:

$$\begin{aligned} a(u, v - u) &= \int_{\Gamma} \sigma(v - u) \cdot \nu \, ds_x + \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, dx \\ &= \int_{\Gamma_g} g \cdot (v - u) \, ds_x + \int_{\Gamma_U} \sigma \nu \cdot (v - u) \, ds_x + \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, dx \\ &= \int_{\Gamma_g} g \cdot (v - u) \, ds_x + \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, dx. \end{aligned}$$

Definimos

$$F(v) := \int_{\Gamma_g} g \cdot v \, ds_x + \int_{\Omega} f \cdot v \, dx$$

y entonces una solución  $u$  del problema 1, que vale  $U$  en  $\Gamma_U$ , cumple

$$a(u, v - u) = F(v - u), \quad \text{para todo } v \in V := \{v = U \text{ en } \Gamma_U\}.$$

Si suponemos  $u, v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  e interpretamos las integrales en el borde en el sentido de la traza, la aplicación  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  así definida es una forma lineal y continua, ya que es

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq |\langle g, v \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}| + |\langle f, v \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}| \\ &\leq \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \|T\| \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

Puesto que pretendemos que toda solución suficientemente suave al nuevo problema, todavía por formular con precisión, sea a su vez solución clásica, hemos de asegurarnos de que esta cumpla todas las condiciones de contorno. Veremos que la única que es necesario imponer, es decir, que no es *natural* con el planteamiento dado, es  $v = U$  en  $\Gamma_U$ , así que llamamos entonces **movimientos admisibles** al subespacio afín

$$V := \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v = U \text{ en } \Gamma_U \text{ en el sentido de la traza}\}.$$

Obsérvese que para que exista alguna  $v = U$  en  $\Gamma_U$  ha de ser  $U \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ , debido a la sobre-yectividad del operador traza (cf. sección A.2). Con todo esto llegamos a la formulación siguiente:<sup>19</sup>

**Problema 2.** Sean  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $U \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  y sea  $V := \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v = U \text{ en } \Gamma_U\}$ . Encuéntrese  $u \in V$  tal que

$$a(u, v - u) = F(v - u), \quad \text{para todo } v \in V.$$

Equivalentemente, minimícese en  $V$  el funcional de la energía potencial:

$$I(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u).$$

### 2.6.2. Existencia y unicidad de solución.

<sup>19</sup>. Cf. [DL76, §III.3.2, p.110] para un comentario sobre el espacio que se toma para  $g$ .

La equivalencia en el problema 2 es la dada por el corolario 18 en A.3 y la existencia y unicidad de solución son consecuencia del lema 20, pero para aplicar estos resultados es necesario demostrar primero la coercitividad de  $a$ . Esto lo hacemos mediante el teorema 31 tras modificar el problema para que sea en el espacio vectorial  $V_0 = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma_U\}$  allí dado en lugar del afín que tenemos ahora. Para ello fijamos  $\varphi \in V$ , es decir tal que  $\varphi = U$  en  $\Gamma_U$  y entonces  $V = \varphi + V_0$ . Ahora,

$$\text{existe } u \in V \text{ tal que } a(u, v - u) = F(v - u), \text{ para todo } v \in V$$

si y sólo si

$$\text{existe } u \in V \text{ tal que } a(u, v_0) = F(v_0), \text{ para todo } v_0 \in V_0,$$

ya que  $v - u = v_0 \in V_0$  y esta diferencia recorre todo  $V_0$  si y sólo si  $v$  recorre todo  $V$ . Pero sabemos que existe  $u_0 \in V_0$  tal que  $u = \varphi + u_0$  y substituyendo en la expresión anterior entonces el problema 2 es equivalente a encontrar  $u_0 \in V_0$  tal que

$$a(u_0, v_0) = F(v_0) - a(\varphi, v_0), \text{ para todo } v_0 \in V_0,$$

y puede aplicarse el teorema 31, seguido del lema 20.

### 2.6.3. Equivalencia para soluciones suaves.

A partir de las ecuaciones (13) y usando ambas condiciones de contorno, hemos obtenido el problema 2. Para ver que, recíprocamente, esta formulación implica la original, es decir (13), supongamos que  $u \in V$  es la solución y sea  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Entonces  $v := u + \varphi \in V$  y

$$a(u, v - u) = \underbrace{\int_{\Gamma} \sigma_{ij} \varphi_i \nu_j ds_x}_{=0} - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \varphi_i dx = \underbrace{\int_{\Gamma_g} g_i \varphi_i ds_x}_{=0} + \int_{\Omega} f_i \varphi_i dx = F(v - u).$$

Así que  $\int_{\Omega} (-\sigma_{ij,j} - f_i) \varphi_i dx = 0$ , y dado que  $\varphi$  era arbitraria,

$$(Au)_i = -\sigma_{ij,j} = f_i, \text{ en } \Omega.$$

Por otro lado, tomando  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  tal que  $\varphi|_{\Gamma_U} = 0$ , de nuevo  $v := u + \varphi$  está en  $V$  y aplicando lo que acabamos de averiguar resulta

$$\int_{\Gamma_g} \sigma_{ij} \varphi_i \nu_j ds_x = \int_{\Gamma_g} g_i \varphi_i ds_x \implies \int_{\Gamma_g} (\sigma_{ij} \nu_j - g_i) \varphi_i ds_x = 0,$$

y de nuevo gracias a que  $\varphi$  era arbitraria,

$$\sigma_{ij} \nu_j = g_i, \text{ en } \Gamma_g.$$

La condición que falta es precisamente la que hemos incluido en el espacio  $V$ , así que están todas y vemos que el problema 2 implica el 1.



### 3. EL PROBLEMA DE SIGNORINI

En la sección precedente hemos estudiado el problema de las deformaciones de un sólido sujeto a unas condiciones de contorno mixtas pero en dominios preestablecidos. Es una situación factible por ejemplo en el estudio de una barra anclada lateralmente a una pared y sin contacto con ningún otro cuerpo en el resto de su superficie: las fuerzas externas la deformarán sin cambiar la zona de contacto y las condiciones de contorno no variarán en el equilibrio.

No es este el caso sin embargo cuando la zona de contacto puede variar: si dejamos reposar una pelota sobre una superficie rígida, no sabremos a priori dónde ésta entrará en contacto exactamente con su soporte. Esto presenta una mayor dificultad por varias razones. Por un lado es más complicado encontrar unas condiciones de contorno adecuadas: nosotros emplearemos argumentos geométricos y aproximados para modelar la condición de que el sólido no ha de penetrar la superficie. Por otro lado, estas condiciones se presentarán en forma de desigualdades, que al trasladarse a una formulación débil resultan en una *inecuación variacional* en un subconjunto convexo de cierto espacio funcional. La investigación sobre la existencia y unicidad de solución a este nuevo problema ha de realizarse por un camino algo diferente puesto que el teorema de representación de Riesz (en el caso simétrico) o el lema de Lax-Milgram ya no son suficientes.

#### 3.1. Ecuaciones.

Consideramos un sólido elástico anisótropo y no homogéneo  $S$  a una temperatura constante que ocupa en su posición de reposo una región abierta y acotada  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Se supone que tal posición existe y está definida por un tensor de esfuerzos idénticamente nulo. Además  $\Omega$  tiene una frontera  $\Gamma := \partial\Omega = \partial\bar{\Omega}$  debidamente suave, por ejemplo de clase  $C^1$  y orientable.<sup>20</sup> Este cuerpo reposa sobre una superficie  $\Sigma$  sin rozamiento y será sujeto a fuerzas de volumen  $f \in C_b^0(\Omega)$  y de superficie  $g \in C_b^0(\Gamma_g)$  (e.d. ambas continuas y acotadas), siendo  $\Gamma_g$  la parte de  $\Gamma$  que no está en contacto con  $\Sigma$ . Designaremos mediante  $\Gamma_s$  el complementario de  $\Gamma_g$ , la región donde puede producirse contacto. Nótese que ambas son desconocidas a priori así como que no habrá desplazamientos entre las condiciones de contorno.<sup>21</sup>

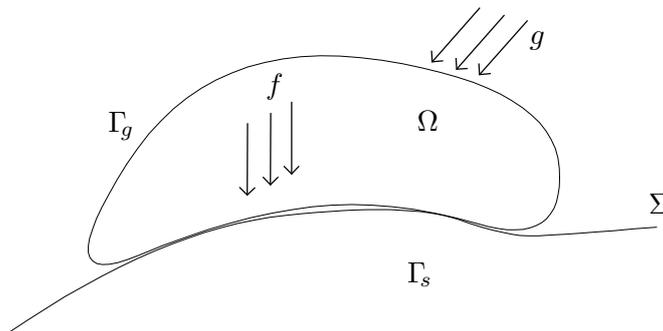


Figura 5. El problema de Signorini.

<sup>20</sup>. La regularidad de  $\Omega$  y su borde pueden reducirse a que  $\Omega$  cumpla la condición del cono y que  $\partial\Omega$  pueda descomponerse en una cantidad finita de  $(N-1)$ -celdas de clase  $C^\infty$  (cf. [Fic70] y [DL76, §III.3.3, nota al teorema 3.1]). No obstante, en este trabajo elegimos por comodidad la clase  $C^1$ .

<sup>21</sup>. Es decir, que en la notación de 2.6:  $\Gamma_U = \emptyset$ .

Se buscan el campo vectorial  $u$  en  $\Omega$  de desplazamientos con respecto a la configuración de referencia y el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff  $\sigma$ , determinado por la ley de Hooke generalizada (6) donde los coeficientes del tensor de Hooke  $a_{ijkl}$  son acotados y continuos en  $\Omega$  y los de una forma bilineal simétrica elíptica: existe  $c_0 > 0$  tal que para toda matriz simétrica  $\xi$  y casi todo  $x \in \Omega$ <sup>22</sup>

$$a_{ijkl}(x) \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c_0 \xi_{ij} \xi_{ij}.$$

Como vimos, este tensor surge en la expresión del potencial elástico  $e$  dependiente del material y función de la posición y el tensor de deformaciones linealizado  $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , cf. (3). Para un material no homogéneo y anisótropo bajo la suposición de pequeñas deformaciones respecto al tamaño del cuerpo, se toma el potencial elástico (5) (cf. [Fic66]), y éste resulta en el tensor de Hooke  $a_{ijkl}$ . Este tensor tiene las simetrías (7).

Con todo lo anterior, las ecuaciones del equilibrio en el problema linealizado<sup>23</sup> son

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j} = f_i & \text{en } \Omega, \\ \sigma_{ij} \nu_j = g_i & \text{en } \Gamma_g. \end{cases} \quad (15)$$

donde  $\nu$  es la normal exterior a  $\Omega$  en cada punto. En  $\Gamma_s$  las condiciones son lo que Signorini denominó *condiciones de contorno ambiguas* puesto que el desconocimiento acerca de dónde se produce contacto se expresa como dos conjuntos de condiciones posibles:<sup>24</sup>

$$\begin{cases} u_i \nu_i = 0, \\ \sigma_{ij} \nu_i \nu_j < 0, \\ \nu_i \sigma_{ij} \tau_j = 0, \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} u_i \nu_i < 0, \\ \sigma_{ij} \nu_i \nu_j = 0, \\ \nu_i \sigma_{ij} \tau_j = 0. \end{cases}$$

Para evitar situaciones degeneradas simples e imposibles físicamente, imponemos  $f \neq 0$  y  $g \neq 0$ . De lo contrario  $u = \text{constante}$  es solución, lo cual es absurdo porque significa que el objeto puede traspasar el obstáculo. Obsérvese que en cambio  $u \equiv 0$  no es nunca solución debido a las condiciones de contorno mutuamente excluyentes. Puede plantearse la pregunta de si esto es deseable, por ejemplo si queremos incluir objetos rígidos en el modelo. Por eso, de manera algo más general (ahora  $u \equiv 0$  es solución), se plantean las siguientes condiciones alternativas:

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu u_\nu = 0, \\ \sigma_i^\tau = 0, \\ \sigma_\nu \leq 0, \end{cases} \quad (16)$$

donde el escalar  $\sigma_\nu := \nu^\top \sigma \nu = \nu_i \sigma_{ij} \nu_j$  es la **tensión normal**, el vector  $\sigma^\tau := \sigma \nu - \sigma_\nu \nu$  es la **tensión tangencial** y el escalar  $u_\nu := u_i \nu_i$  es el **desplazamiento normal**.<sup>25</sup> La condición  $\sigma^\tau = 0$  modela la ausencia de rozamiento y por tanto de tensión tangencial. En el primer grupo de condiciones se tiene un desplazamiento normal nulo o contacto ( $u_i \nu_i = 0$ ) y una reacción de la superficie sobre el cuerpo de tipo únicamente normal, ya que no existe rozamiento. El segundo grupo de condiciones corresponde a una ausencia de contacto ( $u_i \nu_i < 0$ ) y por tanto de reacción de la superficie. Ambos grupos de condiciones se reúnen en uno solo mediante la condición  $\sigma_\nu u_\nu = 0$ .

<sup>22.</sup>  $a$  es un tensor de orden cuatro acotado, simétrico y definido positivo.

<sup>23.</sup> Obsérvese que aunque las condiciones de contorno son no lineales la linealización respecto a los desplazamientos simplifica aun así el problema en el interior.

<sup>24.</sup> Hoy en día estas condiciones se denominan *de tipo Signorini* y son unas de las muchas que dan lugar a problemas *de contorno libre*.

<sup>25.</sup> Se define también el **desplazamiento tangencial**  $u^\tau := u - u^\nu \nu$ . Obsérvese además que claramente  $\sigma^\tau$  así definido es un vector tangente al borde, puesto que  $\sigma^\tau \cdot \nu = \sigma \nu \cdot \nu - \sigma^\nu \nu \cdot \nu = \sigma^\nu - \sigma^\nu = 0$ .

### 3.2. Deducción de las condiciones de contorno.

De las condiciones (16), la primera representa el requisito esencial de «no penetración» y es la más complicada de deducir. Para obtenerla (en el caso particular de  $\mathbb{R}^3$ ) aprovecharemos la condición de los «desplazamientos pequeños» y la proximidad de  $\Gamma$  y  $\Sigma$  cerca de la zona de posible contacto  $\Gamma_s$ : puede mostrarse que esta última implica que ambas superficies son aproximadamente paralelas (es decir que difieren en términos de orden como mínimo dos) y que localmente las normales tienen misma dirección y sentido contrario, como en la figura 6. Giramos además el sistema de coordenadas en  $\mathbb{R}^3$  de modo que la dirección de la normal sea la de la tercera componente:  $\nu(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -1) / \|\nu\|$ ,  $x \in \Gamma$  y  $\nu(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, 1) / \|\nu\|$ ,  $y \in \Sigma$ .

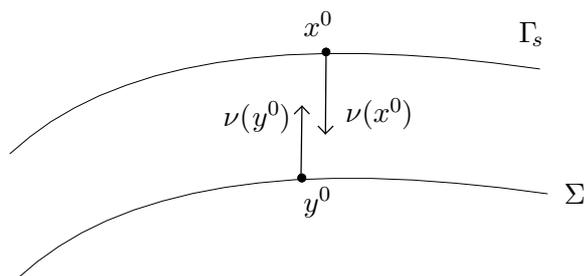


Figura 6. Proximidad de  $\Sigma$  y  $\Gamma_s$ .

Puesto que suponemos que  $\Sigma$  es una variedad suave, existe una representación local de ésta en torno a un  $y^0 \in \Sigma$  fijo como un conjunto  $\{y \in \mathbb{R}^3 : F_1(y) = 0\}$ , con una  $F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que por el teorema de la función implícita podemos asegurar que existen un entorno  $U_y$  de  $(y_1^0, y_2^0)$  en  $\mathbb{R}^2$  y una función  $\phi_y : U_y \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $F_1(y_1, y_2, \phi_y(y_1, y_2)) = 0$  en  $U_y$ . Esta función es la «altura» de un punto  $(y_1, y_2)$  en el sistema de coordenadas rotado que hemos escogido.

Proyectemos ahora paralelamente a la tercera coordenada el trozo de  $\Sigma$  correspondiente a este entorno  $U_y$  sobre  $\Gamma$ , mediante una aplicación  $\pi$  y sea  $x^0 := \pi(y^0) \in \Gamma$ . En torno a este punto encontramos como antes una representación implícita de la variedad y un entorno  $U_x \subset \mathbb{R}^2$ . Definimos  $U := U_x \cap U_y \neq \emptyset$ . En este conjunto, la función  $d(\xi_1, \xi_2) := \phi_x(\xi_1, \xi_2) - \phi_y(\xi_1, \xi_2)$  representa la distancia entre ambas superficies, así que ha de ser  $d \geq 0$ . Pero esto no es una condición sobre los desplazamientos. En  $U$  ha de ocurrir que la altura «en  $\Gamma$ » de un punto  $(\xi_1, \xi_2)$  no supere tras el desplazamiento la altura de dicho punto «en  $\Sigma$ », es decir: para un punto  $x = (\xi_1, \xi_2, \phi_x(\xi_1, \xi_2)) \in \Gamma$  y siendo  $u(x) = (u_1, u_2, u_3)$ ,

$$\phi_x(\xi_1, \xi_2) + u_3 \geq \phi_y(\xi_1 + u_1, \xi_2 + u_2).$$

Suponiendo que  $\Sigma$  es suficientemente suave, podemos aproximar el lado derecho mediante su desarrollo de Taylor y obtener

$$\phi_x(\xi_1, \xi_2) + u_3 \geq \phi_y(\xi_1, \xi_2) + \nabla \phi_y(\xi_1, \xi_2) \cdot (u_1, u_2),$$

que tras una reordenación es

$$u \cdot (\partial_1 \phi_y, \partial_2 \phi_y, -1) \leq d(\xi_1, \xi_2).$$

Si normalizamos esto y remplazamos la normal en  $\Sigma$  por la normal en  $\Gamma$  tal como avisábamos al principio obtenemos precisamente

$$u \cdot \nu_x \leq \tilde{d}.$$

Ahora bien, igual que vimos en la sección 2.6.2 es posible cambiar la función  $\tilde{d}$  por 0 y obtener un problema equivalente. Demostramos esto tras enunciar la formulación débil en el problema 3.

Es importante señalar que con este procedimiento hemos ignorado los posibles desplazamientos tangenciales y por tanto no se excluye automáticamente la posibilidad de que  $\Gamma$  penetre en  $\Sigma$  debido a estos.

El resto de las condiciones son intuitivamente algo más claras: por un lado las fuerzas de cohesión no han de tener más componente que la normal, es decir que la tensión tangencial ha de ser nula. Por otro, sólo debe haber tensión normal si hay contacto, es decir  $\sigma_{ij}\nu_i\nu_j \neq 0$  sólo si  $u_i\nu_i = 0$ . Por último, la tensión normal sólo puede ocurrir «hacia adentro» del sólido, es decir  $\sigma_{ij}\nu_i\nu_j \leq 0$ .

### 3.3. La formulación débil.

Sea  $v$  una función en  $\tilde{V} := \{v \in C^2(\Omega) : v_i\nu_i \leq 0 \text{ en } \Gamma_s\}$ . Multiplicando la primera ecuación de (15) por  $v - u$  e integrando por partes usando la condición de contorno en  $\Gamma_g$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} (v - u)_{i,j} dx &= \int_{\Omega} f_i (v - u)_i dx + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \nu_j (v - u)_i ds_x \\ &= \int_{\Omega} f_i (v - u)_i dx + \int_{\Gamma_g} g_i (v - u)_i ds_x \\ &\quad + \int_{\Gamma_s} \sigma_{ij} \nu_j (v - u)_i ds_x. \end{aligned}$$

A partir de la expresión de la tensión tangencial  $\sigma_i^{\tau} = \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_{\nu}\nu_i$ , podemos descomponer el vector de componentes  $\sigma_{ij}\nu_j$  y substituir en el tercer integrando:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\nu_j (v - u)_i &= (\sigma_i^{\tau} + \sigma_{\nu}\nu_i) (v - u)_i \\ &= \sigma_i^{\tau} (v - u)_i + \sigma_{\nu}\nu_i v_i - \sigma_{\nu}\nu_i u_i \end{aligned}$$

y aplicando las condiciones (16) tenemos que el primero y tercer sumandos son nulos y el segundo es positivo porque  $v \in \tilde{V} \Rightarrow v_i\nu_i \leq 0$  y además  $\sigma_{\nu} \leq 0$ . La tercera integral es por tanto positiva y llegamos a la desigualdad

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (v - u)_{i,j} dx \geq \int_{\Omega} f_i (v - u)_i dx + \int_{\Gamma_g} g (v - u)_i ds_x.$$

Ahora podemos relajar las condiciones de regularidad de partida y la desigualdad sigue teniendo sentido. Ponemos como antes

$$a(u, v - u) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} (v - u)_{i,j} dx$$

y

$$F(v - u) = \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i) dx + \int_{\Gamma_g} g_i (v_i - u_i) ds_x,$$

y tenemos el siguiente enunciado:

**Problema 3.** (Fichera, 1964) Sean  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_g)$ . Encuéntrese  $u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v_i\nu_i \leq 0 \text{ en } \Gamma_s\}$  tal que para todo  $v \in V$

$$a(u, v - u) \geq F(v - u). \quad (17)$$

Esta desigualdad es análoga a la igualdad enunciada en la sección 2.6, pero ahora no es posible aplicar fácilmente el teorema 19 debido a que la forma bilineal (14) asociada al potencial elástico no es  $V$ -elíptica porque no hay desplazamientos prefijados en el borde. En 3.3.2 vemos cómo se resuelve esto.

En la sección 3.2 anunciábamos que no supone una pérdida de generalidad tomar  $\tilde{d}(x) = 0$ , es decir  $V_0 := \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v_i \nu_i \leq 0 \text{ en } \Gamma_s\}$  en lugar de  $V_d := \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v_i \nu_i \leq \tilde{d} \text{ en } \Gamma_s\}$ . Para ver esto observemos que si tenemos  $u_d \in V_d$  tal que  $a(u_d, v_d - u_d) \geq F(v_d - u_d)$  para toda  $v_d \in V_d$ , entonces  $a(u_d, v_0) \geq F(v_0)$  para toda  $v_0 \in V_0$  ya que  $V_d = \varphi_d + V_0$  para un  $\varphi_d \in V_d$  fijo y en particular para  $\varphi_d = u_d$ . Es decir  $v_d - u_d$  con  $v_d \in V_d$  arbitraria recorre todo  $V_0$ . Entonces  $u_d$  puede descomponerse como  $u_d = \varphi_d + u_0$  y el problema de encontrar  $u_0 \in V_0$  tal que  $a(u_0, v_0) \geq F(v_0) - a(\varphi_d, v_0)$  para toda  $v_0 \in V_0$  es equivalente al problema en  $V_d$ .

### 3.3.1. Equivalencia para soluciones suaves.

Igual que hicimos en la sección 2.6.3 demostramos a continuación que toda solución suficientemente regular del problema 3 verifica las condiciones (15) y (16). La técnica es la misma: sumar y restar a una solución funciones adecuadas. Supongamos por tanto que  $u$  es una solución de clase  $\mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$ , que  $f \in \mathbf{C}_b^0(\Omega)$  y  $g \in \mathbf{C}_b^0(\Gamma)$  y sea  $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ . Entonces  $v := u \pm \varphi$  está en  $V$  y

$$a(u, v - u) = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \varphi_i \nu_j \, ds_x - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \varphi_i \, dx \geq \int_{\Gamma_g} g_i \varphi_i \, ds_x + \int_{\Omega} f_i \varphi_i \, dx = F(v - u). \quad (18)$$

Por la elección de  $\varphi$ , a cada lado de la desigualdad el primer integrando es nulo, así que  $\int_{\Omega} [-\sigma_{ij,j} - f_i] \varphi_i \, dx \geq 0$  y repitiendo lo mismo para  $-\varphi$  resulta la primera de las ecuaciones (15):

$$-\sigma_{ij,j} = f_i, \text{ en } \Omega.$$

Substituyendo esto en (18) tenemos

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} \varphi_i \nu_j \, ds_x \geq \int_{\Gamma_g} g_i \varphi_i \, ds_x$$

y esto se cumple siempre que  $v = u \pm \varphi$  esté en  $V$ , pero para concluir algo hemos de escoger de otro modo el espacio donde  $\varphi$  se encuentra. Basta con tomar  $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Gamma_g)$ : llamamos de nuevo  $\varphi$  a una extensión diferenciable de  $\varphi$  a un abierto de  $\mathbb{R}^N$  y entonces  $u \pm \varphi \in V$  porque en  $\Gamma_s$  se cumple  $(u \pm \varphi) \cdot \nu = u \cdot \nu \pm 0 \leq 0$ . Tenemos entonces  $\int_{\Gamma_g} [\sigma_{ij} \nu_j - g_i] \varphi_i \, ds_x = 0$  para toda  $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Gamma_g)$  y en consecuencia la segunda de las ecuaciones (15):

$$\sigma_{ij} \nu_j = g_i, \text{ en } \Gamma_g.$$

De nuevo incorporamos esto en (18) y tenemos la desigualdad

$$\int_{\Gamma_s} \sigma_{ij} \nu_j \varphi_i \, ds_x \geq 0.$$

La orientabilidad de  $\Gamma$  implica que la normal  $\nu$  está bien definida y es continua, así que podemos escoger  $\varphi \in \mathbf{C}_0(\Gamma_s)$  tal que  $\varphi \cdot \nu = 0$  en  $\Gamma_s$ . Las funciones  $v = u \pm \varphi$  siguen estando en  $V$  y poniendo  $\pm \varphi$  en la desigualdad anterior llegamos a una igualdad. Si descomponemos  $\sigma_{ij} \nu_j$  en sus componentes tangencial y normal esta es

$$0 = \int_{\Gamma_s} (\sigma_i^\tau + \sigma_\nu \nu_i) \varphi_i \, ds_x = \int_{\Gamma_s} (\sigma_i^\tau \varphi_i + \sigma_\nu \nu_i \varphi_i) \, ds_x = \int_{\Gamma_s} \sigma_i^\tau \varphi_i \, ds_x$$

y si tomamos como  $\varphi$  precisamente la restricción  $\sigma_i^\tau|_{\Gamma_s}$  conseguimos la última de las condiciones (16):

$$0 = \int_{\Gamma_s} \sigma_i^\tau \varphi_i \, ds_x = \int_{\Gamma_s} (\sigma_i^\tau)^2 \, ds_x \implies \sigma^\tau = 0 \text{ en } \Gamma_s.$$

Una vez más añadimos este resultado junto a los anteriores en (18), pero tomamos  $\varphi \in V$  cualquiera y  $v = u + \varphi$  y ya sólo queda

$$\int_{\Gamma_s} \sigma_\nu \nu_i \varphi_i \, ds_x \geq 0.$$

Como  $v_\nu = v_i \nu_i \leq 0$  es arbitrario, sólo puede ser  $\sigma_\nu \leq 0$ . Y si tomamos  $\varphi = u$ , como los datos  $f, g$  pueden elegirse libremente concluimos  $\sigma_\nu u_\nu = 0$ .

### 3.3.2. Existencia y unicidad de solución.

Como vemos y como se discute en la sección A.4 el problema para demostrar la elipticidad de la forma bilineal y poder aplicar los resultados de A.3 reside en que ahora no hay condiciones de contorno de tipo Dirichlet (i.e. en la notación de 2.6:  $\Gamma_U = \emptyset$ ) que excluyan los movimientos rígidos, sobre los cuales  $a$  es invariante. Una solución a esta dificultad pasa por excluirlos cocientando por ellos y aplicando la desigualdad de Korn. Esto es el contenido del teorema 32: pasando al cociente  $V := \mathbf{H}^1(\Omega) / \mathcal{R}$  allí definido se obtiene la desigualdad (17) para elementos de  $V$ . Pero esta solución *no sirve en el problema de Signorini* porque no podemos ignorar las traslaciones si importa la posición respecto a un obstáculo. Es por esto que es necesario un teorema de existencia específico.

Del hecho de que  $a(\rho, \rho) = 0$  para todo  $\rho \in V \cap \mathcal{R}$  se sigue inmediatamente que una condición necesaria para tener (17) en  $V$  es que ha de cumplirse

$$\int_{\Omega} f_i \rho_i \, dx + \int_{\Gamma_g} g_i \rho_i \, ds_x \leq 0. \quad (19)$$

Pero hace falta fortalecer esta *condición de compatibilidad* para obtener un teorema de existencia: diremos que (19) se cumple en el *sentido fuerte* si se da la igualdad si y sólo si el movimiento  $\rho$  es **bilateral**, esto es, si  $\rho \in V \cap \mathcal{R} \iff -\rho \in V \cap \mathcal{R}$ . Entonces tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.** (Fichera, 1964) *Sea  $e(x, \varepsilon)$  una función continua y convexa en  $\varepsilon$  para cada  $x$  y sean  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{L}^2(\Gamma_g)$  y  $K_e = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega) : e(x, \varepsilon(u)) \in \mathbf{L}^1(\Omega)\}$ . Entonces  $V \subset K_e$  y si existe una constante  $\lambda_0$  positiva tal que  $e(x, \varepsilon) > \lambda_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$ , y la condición (19) se cumple en el sentido fuerte, entonces el funcional siguiente tiene un mínimo absoluto en  $V$ :*

$$I(u) := \int_{\Omega} e(x; \varepsilon(u)) \, dx - \int_{\Omega} f_i u_i \, dx - \int_{\Gamma_g} g_i u_i \, ds_x. \quad (20)$$

Como ya dijimos, el primer término a la derecha de (20) es el correspondiente a la energía total del sistema, ya que al estar en equilibrio no hay energía cinética, el segundo es el trabajo realizado por las fuerzas externas y el tercero por las fuerzas de superficie.

### 3.3.3. Regularidad de la solución.

Como cabe esperar, la regularidad de la solución es afectada por la zona en la que se puede producir contacto. De hecho es la frontera entre  $\Gamma_g$  y  $\Gamma_s$  quien presenta una dificultad. El siguiente resultado asegura regularidad como en un problema elíptico habitual de segundo orden en  $\mathbf{H}^1$ , salvo en la interfaz entre estas regiones del borde.

**Teorema 2.** (Kinderlehrer [Kin81]) *Sea  $u$  la solución al problema 3 con datos  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  y sea  $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Gamma_g \cup \partial\Gamma_s) > \delta\}$ . Entonces*

$$u \in \mathbf{H}^2(\Omega_\delta) \text{ para todo } \delta > 0$$

*y las condiciones de contorno (16) son válidas en  $\Gamma_g \cup \Gamma_s$ . En particular, para  $N = 3$ , la solución está en  $\mathbf{C}^{0,1/2}(\overline{\Omega}_\delta) \cap \mathbf{W}^{1,6}(\Omega_\delta)$ .*

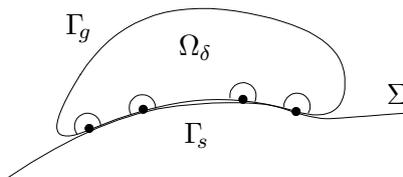


Figura 7. Regularidad de la solución cerca del borde.

### 3.4. El caso escalar.

En el caso vectorial, la imposición de que el sólido no traspase  $\Sigma$  se ha modelado mediante una condición sobre el desplazamiento normal: los movimientos admisibles son aquellos que cumplen  $u_i \nu_i \leq d \equiv 0$ . En el caso unidimensional esta condición es en realidad  $u \leq d$  si suponemos que el obstáculo se encuentra completamente de un lado del sólido, pero en lugar de una función de distancia  $d$  tomaremos una  $\tilde{\psi}$  representando el obstáculo y diremos que la solución no penetra si queda por encima de  $\tilde{\psi}$ , es decir si  $x + u(x) \geq \tilde{\psi}(x)$ . Definiendo  $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) - x$  la condición queda  $u \geq \psi$ .

Por otra parte, suponiendo homogeneidad las condiciones sobre el tensor  $\sigma$  también se simplifican y la ecuación se reduce a (12), pero añadiremos un término lineal  $\alpha u$  con  $\alpha \geq 0$ . Puede dársele cierto significado físico al término  $\alpha u$  si se reescribe la ecuación como  $-\Delta u = f - \alpha u$  y se piensa que se trata de una fuerza elástica adicional, directamente proporcional a la elongación del material. Es necesaria una elección de  $\alpha$  positivo para garantizar con nuestras herramientas la unicidad de solución al problema  $-\Delta u + \alpha u = f$  con condiciones de tipo Neumann que planteamos más abajo. Si elegimos  $\alpha = 0$  (caso *semi-coercitivo*) hemos de imponer una condición de compatibilidad a los datos para tener unicidad de solución o bien pasar al espacio cociente  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  tal y como se hace en el teorema 32 y no podemos hacer ahora porque los movimientos rígidos importan.

Usaremos el siguiente concepto: se dice de una aplicación  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  que es un **grafo maximal monótono (no decreciente)** si cumple:

1.  $(x - y)(a - b) \geq 0$  para todos  $x \in \beta(a)$  e  $y \in \beta(b)$  (*monotonía*).
2. Si  $\bar{\beta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es otra aplicación que cumple la condición anterior y además  $\beta(a) \subset \bar{\beta}(a)$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $\bar{\beta} = \beta$  (*maximalidad*).

Aunque nosotros sólo la empleamos para enunciar el problema, esta idea juega un papel central en la literatura y por eso es digna de mención (cf. por ejemplo [Bré72]). Con todo lo anterior el problema se reformula como sigue:

**Problema 4.** Encuéntrese  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{en } \Omega, \\ -\partial_\nu u + g \in \beta(u - \psi) & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (21)$$

donde  $\beta$  es el grafo maximal monótono (no decreciente en  $u$ ) de  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$\begin{cases} \beta(s) = \emptyset & \text{si } s < 0, \\ \beta(s) = (-\infty, 0] & \text{si } s = 0, \\ \beta(s) = 0 & \text{si } s > 0. \end{cases}$$

La condición empleando el grafo se traduce en las siguientes condiciones para la ecuación escalar, que corresponden claramente a la primera, segunda y cuarta respectivamente de (16):

$$u \geq \psi, \quad (-\partial_\nu u + g)(u - \psi) = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\nu u \geq g.$$

La formulación débil del problema es:

**Problema 5.** *Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera  $C^1$ . Dados  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  y  $\alpha > 0$ , encuéntrese  $u \in H^1(\Omega)$  tal que*

$$u \in K_\psi := \{v \in H^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ en } \Gamma\}, \quad (22)$$

y para todo  $v \in K_\psi$  se cumpla

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) \, dx + \alpha \int_{\Omega} u (v - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) \, dx + \langle g, v - u \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)} \, ds_x.$$

A partir de un resultado de Brézis [Bré72, Teorema I.10], que asegura que la solución de este problema está en  $H^2(\Omega)$  cuando  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g, \psi$  son cero, se deduce la misma regularidad para  $\psi \in H^{3/2}(\Gamma)$  y  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$  generales. Conviene observar que la condición  $\alpha > 0$  es esencial para garantizar esta regularidad, como muestra un ejemplo clásico que puede verse por ejemplo en [Kin81, p. 617].

#### 4. ESTIMACIONES DE LA REGIÓN DE COINCIDENCIA

De especial importancia en el problema de Signorini es la determinación de la zona de la frontera en la cual puede producirse contacto. Puesto que se trata de un aspecto geométrico del problema, este estudio depende en gran medida del número de dimensiones en el que se mueve  $u$ .

##### 4.1. El caso vectorial.

Con la formulación del problema 3, denominamos **región de coincidencia** al conjunto  $I_\nu$  de los puntos que sufren un desplazamiento normal igual al «salto»  $\tilde{d}$  entre  $\Gamma_s$  y  $\Sigma$  (recuérdese que estamos trabajando con el problema equivalente  $\tilde{d} = 0$ ):

$$I_\nu := \{x \in \Gamma_s : u(x) \cdot \nu(x) = 0\}. \quad (23)$$

Según el teorema 2, las condiciones de contorno (16) son válidas en todo  $\Gamma$  salvo posiblemente los puntos de  $\partial\Gamma_s$ , pero al menos en  $I_\nu \subset \Gamma_s$  sabemos que la tensión normal es  $\sigma_\nu := \sigma_{ij} \nu^i \nu^j \leq 0$ . El mismo teorema implica que  $\sigma_\nu \in \mathbf{L}^2_{\text{loc}}(\Gamma \setminus \partial\Gamma_s)$  y el siguiente afirma que  $\sigma_\nu \in \mathbf{L}^1(\Gamma_s)$ , aunque en general no es cierto que  $\sigma_\nu \in \mathbf{L}^2(\Gamma_s)$ .<sup>26</sup>

**Lema 3.** (*Kinderlehrer [Kin81, Theorem 5.1]*) *Sea  $u$  una solución del problema 3. Entonces  $\sigma_\nu \in \mathbf{L}^1(\Gamma_s)$  y para toda  $\varphi \in \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  se cumple:*

$$a(u, \varphi) - F(\varphi) = \int_{\Gamma_s} \sigma_\nu \varphi \cdot \nu \, ds_x = \int_{I_\nu} \sigma_\nu \varphi \cdot \nu \, ds_x.$$

*Demostración.* Obsérvese que la segunda igualdad es consecuencia de la condición de contorno  $u_\nu \sigma_\nu = 0$  en  $\Gamma_s$ , puesto que en  $\Gamma_s \setminus I_\nu$  es  $u_\nu \neq 0$ . Para la otra igualdad

$$a(u, \varphi) - F(\varphi) = \int_{\Gamma_s} \sigma_\nu \varphi \cdot \nu \, ds_x \text{ para } \varphi \in \mathbf{C}^1(\bar{\Omega}) \quad (24)$$

tomamos primero  $\varphi \in \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  de modo que sea cero en un  $r$ -entorno de  $\partial\Gamma_s$  en  $\Omega$  y elegimos  $\delta < r$  para que  $u \in \mathbf{H}^2(\Omega_\delta)$ , por el teorema 2. Podemos obtener (24) integrando por partes en  $a(u, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) - F(\varphi) &= \int_{\Omega_\delta} \sigma_{ij} \varphi_{i,j} \, dx - \int_{\Omega_\delta} f_i \varphi_i \, dx - \int_{\Gamma_g} g_i \varphi_i \, ds_x \\ &= \int_{\Omega_\delta} (-\sigma_{ij,j} - f_i) \varphi_i \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_g} (-\sigma_{ij} \nu_j - g_i) \varphi_i \, ds_x + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_g} \sigma_{ij} \nu_j \varphi_i \, ds_x \\ &= \int_{\Gamma_s} \sigma_{ij} \nu_j \varphi_i \, ds_x \\ &= \int_{\Gamma_s} \sigma_\nu \varphi \cdot \nu \, ds_x, \end{aligned} \quad (25)$$

donde en la tercera igualdad hemos utilizado que  $u$  es solución y en la siguiente hemos multiplicado por  $\nu \cdot \nu = 1$ .

<sup>26</sup>. Cf. [Kin81], ejemplos de las secciones §2 y §6.

Para dar el paso a funciones  $\varphi$  arbitrarias demostramos primero que  $\sigma_\nu \in \mathbf{L}^1(\Gamma_s)$ , empleando un argumento típico de «truncado»: sea ahora  $\zeta \in \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  con  $\zeta = \nu$  sobre todo  $\Gamma$ . Para  $0 < r < 1$ , sea  $\eta^r$  una función escalar y Lipschitz en  $\mathbb{R}^N$  tal que

$$\eta^r(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{dist}(x, \partial\Gamma_s) \geq 2r, \\ 0, & \text{si } \text{dist}(x, \partial\Gamma_s) \leq r, \end{cases}$$

así como

$$0 \leq \eta^r \leq 1, \quad |\nabla \eta^r| \leq K/r \quad \text{y} \quad \eta_r \leq \eta_\rho \quad \text{para} \quad \rho \leq r.$$

Dado que  $\partial\Gamma_s$  es una variedad compacta de dimensión  $N - 2$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta^r|^2 dx &\leq \frac{K^2}{r^2} \text{med}\{x \in \mathbb{R}^N : r \leq \text{dist}(x, \partial\Gamma_s) \leq 2r\} \\ &\leq \frac{K^2}{r^2} r^2 C \leq C_0 \end{aligned}$$

para ciertas constantes  $C$  y  $C_0$ . Si tomamos  $\varphi = \zeta \eta^r$  en (24), esta función es de nuevo cero en un  $r$ -entorno de  $\partial\Gamma_s$  y podemos repetir la cuenta inicial:

$$\begin{aligned} a(u, \zeta \eta^r) - F(\zeta \eta^r) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \zeta_i \eta_{,j}^r dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \zeta_{i,j} \eta^r dx - F(\eta^r \zeta) \\ &= \int_{\Gamma_s} \eta^r \sigma_\nu ds_x, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\zeta = \nu$  en  $\Gamma$ . Para la primera integral usamos que  $\zeta$  es acotada en el compacto  $\bar{\Omega}$  y que  $\nabla \eta^r, \nabla u \in L^2(\Omega)$ : poniendo  $\Omega' = \text{supp } \nabla \eta^r \cap \Omega$ , con la desigualdad de Hölder y la cota sobre  $|\nabla \eta^r|$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sigma_{ij} \zeta_i \eta_{,j}^r dx \right| &\leq \int_{\Omega'} |\sigma_{ij} \zeta_i \eta_{,j}^r| dx \\ &\leq C \|\nabla \eta^r\|_{L^2(\Omega')} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')} \\ &\leq C' \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')} \end{aligned}$$

y esta última norma tiende a cero cuando  $r \rightarrow 0$ . Para la segunda integral tenemos en cuenta que  $\eta^r \nearrow 1$  en casi todo punto, así que por el teorema de la convergencia dominada  $\int_{\Omega} \sigma_{ij} \zeta_{i,j} \eta^r dx \rightarrow \int_{\Omega} \sigma_{ij} \zeta_{i,j} dx < \infty$ . En la tercera integral usamos que  $\sigma_\nu \leq 0$  en  $\Gamma_s$ , así que  $-\eta^r \sigma_\nu$  crece a  $-\sigma_\nu$  en  $\Gamma_s$  cuando  $r \rightarrow 0$  y aplicamos el teorema de la convergencia monótona para deducir  $\sigma_\nu \in L^1(\Gamma_s)$  y

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \zeta_{i,j} dx - F(\zeta) = \int_{\Gamma_s} \sigma_\nu ds_x.$$

Para  $\varphi \in \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  arbitraria, (24) es consecuencia del teorema de la convergencia dominada y el argumento anterior, utilizando que  $\sigma_\nu \in L^1(\Gamma_s)$ : multiplicamos  $\varphi$  por  $\eta^r$  y podemos aplicar (25) de nuevo y terminar igual.

Ahora podemos acotar  $|\sigma_\nu \varphi \eta^r \cdot \nu| \leq |\sigma_\nu| \max |\varphi \cdot \nu| \in L^1(\Gamma_s)$  y como  $\sigma_\nu \varphi \eta^r \cdot \nu \rightarrow \sigma_\nu \varphi \cdot \nu$  en casi todo punto de  $\Gamma_s$ , se aplica el teorema de la convergencia dominada.  $\square$

**Teorema 4.** (*Kinderlehrer [Kin81]*) *Equilibrio de fuerzas.* Sea  $u$  una solución del problema 3. Entonces para todo movimiento rígido  $\rho$  se cumple:

$$\int_{I_\nu} \sigma_\nu \rho \cdot \nu ds_x + F(\rho) = 0,$$

y el conjunto  $I_\nu$  tiene medida  $(N - 1)$ -dimensional positiva.

*Demostración.* Para cualquier movimiento rígido  $\rho$  se cumple  $a(u, \rho) = 0$  así que debido al lema 3 se cumple la igualdad del enunciado. Por otra parte, vimos en (19) que una condición necesaria para la existencia de solución es  $F(\rho) < 0$  para todo movimiento rígido y admisible, y entonces

$$\int_{I_\nu} \sigma_\nu \rho \cdot \nu \, ds_x = -F(\rho) > 0.$$

Por lo tanto  $I_\nu$  no puede tener medida nula.  $\square$

Tenemos dos lecturas inmediatas de este teorema:

- La igualdad representa el hecho de que el trabajo realizado por la suma de las fuerzas exteriores es igual al realizado por la reacción normal en la región de coincidencia.
- Según el modelo, el cuerpo deformado y en equilibrio no puede ser sostenido sobre la superficie  $\Sigma$  únicamente por esfuerzos a lo largo de una variedad  $N - 2$  dimensional (por ejemplo el borde de  $\Gamma_s$ ) o entonces  $I_\nu$  estaría contenido en su interior que tiene medida nula.

#### 4.2. El caso escalar.

En las condiciones de la sección 3.4 denominamos **región de coincidencia** al conjunto

$$I_\psi := \{x \in \Gamma: u(x) = \psi(x), \text{ en el sentido de la traza}\}. \quad (26)$$

En [Día80] se obtienen estimaciones para la región de coincidencia (26) en el caso  $g = 0$  y  $\psi = 0$  empleando una técnica de comparación de soluciones: se construye una supersolución local que acota la solución por arriba y se anula en un conjunto adecuado. Las cotas están basadas en la distancia al conjunto donde las fuerzas de volumen son mayores en magnitud que un  $\delta$ . En concreto se demuestra el teorema 6 tras definir los conjuntos

$$S(f, \delta) := \{x \in \Omega: f(x) < -\delta\} \text{ con } \delta > 0$$

y la función

$$\phi(x_0, \Gamma_0) := \inf \{\cos(\nu(x)), x - x_0 : x \in \Gamma_0\} \text{ con } x_0 \in \Gamma \text{ y } \Gamma_0 \subset \Gamma.$$

El propósito del conjunto  $S(f, \delta)$  es asegurar que la región de coincidencia no sea vacía: si se acepta como dato  $f \equiv k$  constante, entonces  $u = k/\alpha$  es solución e  $I_0 = \emptyset$ . Por otra parte, la función  $\phi(x_0, \Gamma_0)$  mide la «convexidad respecto al punto»  $x_0$  del subconjunto  $\Gamma_0$  en el sentido de que es no negativa si la envolvente convexa de  $\bigcup_{x \in \Gamma_0} \overline{xx_0}$  está «del mismo lado» de  $\Gamma_0$ .

Necesitamos el siguiente lema de comparación (para la existencia de soluciones en  $H^2(\Omega)$  véanse los resultados de regularidad en [Bré72, §I.2.2]):

**Lema 5.** Sean  $f_1 \leq f_2 \in L^2(\Omega)$  y  $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$  funciones escalares tales que

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \alpha u_i = f_i = f_i & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u_1 \leq \partial_\nu u_2 & \text{en } \Gamma_\nu, \\ u_1 \leq u_2 & \text{en } \Gamma_u, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_\nu \uplus \Gamma_u = \Gamma$  y  $\Gamma_u$  puede ser vacío. Entonces  $u_1 \leq u_2$  en casi todo punto de  $\Omega$ .

*Demostración.* Sea  $w^+ = (u_1 - u_2)^+$ , la parte positiva de  $w := u_1 - u_2 \in H^2(\Omega)$ . Por el teorema 36 esto es una función de  $H^1(\Omega)$  que suponemos distinta de cero o no hay nada que hacer. Entonces  $-\Delta w + \alpha w = f_1 - f_2 \leq 0$  y multiplicando esta inecuación por  $w^+$  e integrando por partes resulta:

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\int_{\Omega} \Delta w w^+ dx + \alpha \int_{\Omega} w w^+ dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} w^+ \nabla w \nu ds_x + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w^+ dx + \alpha \int_{\Omega} w w^+ dx, \end{aligned}$$

y como el segundo sumando es no negativo y el último estrictamente positivo, el primero ha de ser estrictamente positivo:<sup>27</sup>

$$\int_{\partial\Omega} (u_1 - u_2)^+ (\partial_{\nu} u_1 - \partial_{\nu} u_2) ds_x > 0. \quad (27)$$

Ahora bien, por hipótesis se cumple en  $\partial\Omega$  que

$$(u_1 - u_2)^+ (\partial_{\nu} u_1 - \partial_{\nu} u_2) \begin{cases} = 0 & \text{en } \Gamma_u, \\ \leq 0 & \text{en } \Gamma_{\nu}, \end{cases}$$

así que el integrando de (27) es no positivo lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 6.** (*Díaz [Día80]*) Sea  $x_0 \in \Gamma$  de modo que existan  $R_0 > 0$  y  $\delta > 0$  tales que

$$B(x_0, R_0) \cap \Omega \subset S(f, \delta) \quad \text{y} \quad \phi(x_0, \Gamma_0) \geq 0, \quad \text{con } \Gamma_0 := \Gamma \cap \bar{B}(x_0, R_0).$$

Entonces si una solución  $u$  del problema 5 está acotada por una constante  $M$  sobre  $S(f, \delta)$  se tiene que  $u(x) = 0$  en  $\Gamma_1 := \Gamma \cap B(x_0, R_1)$ , siendo

$$R_1 := R_0 - \left( \frac{2MN}{\delta} \right)^{1/2}.$$

*Demostración.* Fijado un  $x_0 \in \Gamma$  cumpliendo las condiciones definimos una función auxiliar  $u_2$  denominada *supersolución local* mediante

$$u_2(x) := \begin{cases} h(|x - x_0| - R_1) & \text{si } |x - x_0| > R_1 \\ 0 & \text{si } |x - x_0| \leq R_1 \end{cases},$$

donde  $h(r) := \delta r^2 (2N)^{-1}$ . Nuestro propósito es aplicar el lema 5 a las funciones  $u$  y  $u_2$  en el conjunto  $D := B(x_0, R_0) \cap \Omega$ . Sea  $f_2 := -\Delta u_2 + \alpha u_2$  en  $D$ . Tenemos, si  $|x - x_0| > R_1$ :

$$\partial_{ii} u_2(x) = h''(|x - x_0| - R_1) \frac{x_i - x_i^0}{|x - x_0|} + h'(|x - x_0| - R_1) \left( \frac{1}{|x - x_0|} - \frac{(x_i - x_i^0)^2}{|x - x_0|^3} \right),$$

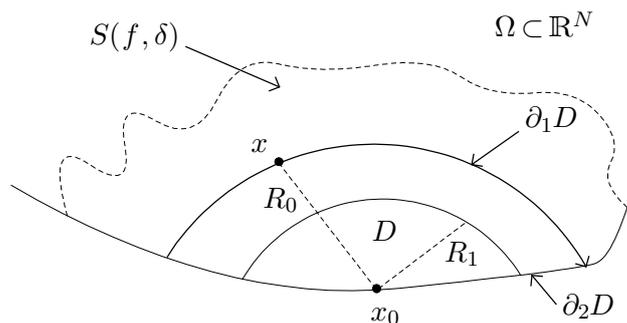
de donde

$$\Delta u_2(x) = \frac{\delta}{N} + \frac{\delta}{N} (|x - x_0| - R_1) \frac{N-1}{|x - x_0|} = \frac{\delta}{N} \left( 1 + N - 1 - \frac{R_1}{|x - x_0|} \right) \leq \delta.$$

Como por construcción es  $u_2 \geq 0$  en  $D$  se sigue:

$$-\Delta u_2 + \alpha u_2 =: f_2 \geq -\delta \geq f.$$

<sup>27</sup>. Para la no negatividad del segundo sumando, obsérvese que, en general, del hecho de que  $(w^-, w^+)_{L^2} = 0$  se sigue  $(w, w^+)_{L^2} = (w^+, w^+)_{L^2} \geq 0$ .



**Figura 8.** Teorema 6.

Sea ahora  $\partial D = \partial_1 D \uplus \partial_2 D$  con  $\partial_1 D := \partial D - \partial \Omega$  y  $\partial_2 D := \partial D \cap \partial \Omega = \Gamma_0$  como en la figura 8. En  $\partial_1 D$  es  $|x - x_0| = R_0$  así que  $u_2(x) = h(R_0 - R_1) = M$  y como por hipótesis  $u \leq M$  en  $S(f, \delta) \supset \partial_1 D$  se cumple que  $u \leq u_2$  en  $\partial_1 D$ . Es más, si  $I := \{x \in \partial_2 D : u(x) = 0\}$  entonces  $u \leq u_2$  en  $\partial_1 D \cup I$  porque  $u_2$  es no negativa por construcción. Por otra parte, en  $\partial_2 D$

$$\partial_\nu u_2(x) = h'(|x - x_0| - R_1) \cos(\nu(x), x - x_0) \geq h'(|x - x_0| - R_1) \phi(x_0, \Gamma_0) \geq 0,$$

pero en  $\partial_2 D$  puede ocurrir que  $u > 0$  ó  $u = 0$  y por las condiciones de contorno, en el primer caso es  $\partial_\nu u = 0$ , luego  $0 = \partial_\nu u \leq \partial_\nu u_2$  en  $\partial_2 D \setminus I$ . Nótese que tanto aquí como más arriba no es necesario que  $I$  sea no vacío. La función  $u_2$  es una solución del problema

$$-\Delta u_2 + \alpha u_2 = f_2 \text{ en } D$$

y el lema 5 permite asegurar que  $u(x) \leq u_2(x)$  en c.t.p. de  $D$  y por tanto sobre  $\Gamma_1 := \partial \Omega \cap B(x_0, R_1)$  se tiene que  $0 \leq u(x) \leq u_2(x) = 0$ , de hecho en todo  $\Omega \cap B(x_0, R_1)$   $\square$

Puede obtenerse una cota sobre la función  $u$  mediante el principio del máximo y entonces una aplicación directa del teorema 6 proporciona el siguiente resultado.

**Corolario 7.** *Supongamos el dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  convexo e, igual que hasta ahora, abierto, acotado y de frontera al menos  $C^1$ . Sean  $f \in L^\infty(\Omega)$  y  $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  solución del problema 5. Entonces  $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty =: M$  y  $u = 0$  sobre  $\Gamma_0 := \{x \in \Gamma : \text{dist}(x, \partial S(f, \delta) \cap \Gamma) \geq (2MN/\delta)^{1/2}\}$ , para un  $\delta > 0$ .*

En el caso más general con datos  $f, g, \psi$  y  $\alpha$  arbitrarios puede extenderse la técnica anterior para encontrar estimaciones similares. En un primer paso el siguiente teorema proporciona una condición necesaria para que  $I_\psi$  tenga medida nula, apoyándose en una función que recoge la influencia de los datos en el comportamiento de la solución en el borde. Considérese la única función  $u_0 \in H^1(\Omega)$  solución débil (dada por el corolario 22) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \alpha u_0 = f & \text{en } \Omega, \\ u_0 = \psi & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (28)$$

y la función  $\tilde{g}$  definida en  $\Gamma$  mediante

$$\tilde{g} := g - \partial_\nu u_0 \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (29)$$

Esta definición está motivada por el siguiente lema trivial.

**Lema 8.** *Sea  $u$  la solución del problema 5 y sea  $u_0$  la solución de (28). Entonces la función  $\tilde{u} = u - u_0$  es solución del problema 5 con datos  $f = 0, \psi = 0$  y  $\tilde{g}$  dada por (29).*

La función  $\tilde{g}$  puede hacerse más explícita empleando la función de Green asociada al problema (28). Si buscamos la solución en  $H^2(\Omega)$ , partiremos de una condición en el borde  $\psi \in H^{3/2}(\Gamma)$  así que por el teorema de la traza podremos considerar sin pérdida de generalidad una extensión  $\psi \in H^2(\Omega)$  y entonces poniendo  $f^* := f + \Delta \psi - \alpha \psi$  y siendo  $G(x, y)$  la función de Green para el problema de Dirichlet asociado al operador  $-\Delta + \alpha$  en  $\Omega$  tenemos:

$$u_0(x) = \psi(x) + \int_{\Omega} f^*(\xi) G(x, \xi) d\xi \text{ para } x \in \bar{\Omega}.$$

En particular si  $x \in \Gamma$  tenemos

$$\tilde{g}(x) = g(x) - \partial_{\nu} \psi(x) - \int_{\Omega} f^*(\xi) \partial_{\nu} G(x, \xi) d\xi. \quad 28$$

En el siguiente teorema demostramos por fin la condición necesaria dada en [DJ88].

**Teorema 9.** *Supóngase que la región de coincidencia  $I_{\psi}$  tiene medida positiva y es suave y sea  $\tilde{g}$  la función definida en (29). Entonces necesariamente ocurre que  $\tilde{g} \leq 0$  en  $I_{\psi}$ .*

*Demostración.* Como decíamos en el lema 8, la función  $\tilde{u} = u - u_0$  resuelve el problema 5 con  $f = 0$ ,  $\psi = 0$  y  $g = \tilde{g}$  (entonces  $I_{\psi}$  es  $I_0$ ). De la inecuación variacional deducimos que para toda  $v \in K'_0 := \{v \in H^2(\Omega) : v \geq 0 \text{ en } \Gamma\}$  la función  $w := v - u + u_0$  está en  $H^2(\Omega)$  y cumple, tras integrar por partes:

$$-\int_{\Omega} \Delta w (u - u_0) dx + \alpha \int_{\Omega} w (u - u_0) dx + \int_{\Gamma} \partial_{\nu} w (u - u_0) ds_x \geq \int_{\Gamma} \tilde{g} w ds_x.$$

Puesto que  $I_0$  es suave y de medida positiva, existe  $\theta \in C^2(\Gamma)$  no nula en  $I_0$  y cero en  $\Gamma - I_0$  (por ejemplo tomando la convolución de  $\chi_{I_0}$  con una aproximación de la identidad). Definimos ahora  $w_0 \in H^2(\Omega)$  como la solución de (28) con datos  $f = 0$  y  $\psi = \theta$ . Entonces  $w_0 + u \in K'_0$  y podemos tomar  $w = w_0$  en la inecuación anterior y deducir que

$$0 \geq \int_{\Gamma} \tilde{g} w ds_x = \int_{\Gamma} \tilde{g} \theta ds_x.$$

Como la función  $\theta$  es (suficientemente) arbitraria se sigue que  $\tilde{g} \leq 0$  en  $I_0$ .  $\square$

No es cierta en cambio la afirmación recíproca: que la función  $\tilde{g}$  no sea positiva en una región de la frontera no es suficiente para asegurar que la intersección de dicha región y el conjunto  $I_{\psi}$  sea no vacía. Esto lo muestra un ejemplo dado en [DJ88]. Sin embargo sí se cumple añadiendo una propiedad geométrica a  $\Omega$  que la condición es «casi» suficiente para la formación del conjunto de coincidencia.

**Teorema 10.** *(Díaz y Jiménez [DJ88]) Sea  $\Omega$  un abierto convexo de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $u \in H^2(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$  una solución del problema 5 con cota  $\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq M$ . Supóngase que existen  $\delta > 0$  y  $\Gamma_{\delta} \subset \Gamma$  tales que*

$$\tilde{g}(\xi) \leq -\delta \text{ en } \Gamma_{\delta},$$

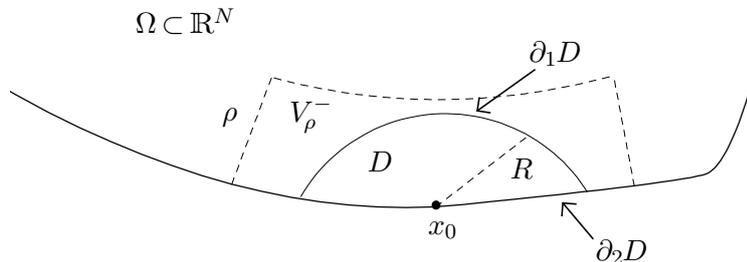
con  $\tilde{g}$  definida como en el teorema 9. Entonces se tiene la estimación

$$I_{\psi} \supset \{\xi \in \Gamma_{\delta} : d(\xi, \Gamma \setminus \Gamma_{\delta}) \geq R = 2MN/\delta\}.$$

---

28. Recuérdese de paso que por el principio del máximo y el mínimo sabemos además que las funciones  $G$  y  $\partial_{\nu} G$  son respectivamente positiva y negativa.

*Demostración.* De nuevo según el lema 8 es suficiente con probar la estimación en el caso en el que los datos son  $f = 0$ ,  $\psi = 0$  y  $\tilde{g}$ , porque si  $\tilde{u}$  es la solución en este caso, entonces  $u = \tilde{u} + u_0$  es la solución del problema con los datos  $f, \psi, g$  originales y tenemos  $I_\psi(u) = I_0(\tilde{u})$ .



**Figura 9.** Teorema 10.

Sea  $x_0 \in \Gamma_\delta$  con  $R := d(x_0, \Gamma \setminus \Gamma_\delta)$  y sea  $D := \Omega \cap B(x_0, R)$ . Definamos como en la demostración del teorema 6 los conjuntos  $\partial_1 D := \partial D - \Gamma$  y  $\partial_2 D := \partial D \cap \Gamma \subset \Gamma_\delta$ . Para cierto  $c > 0$  a escoger posteriormente, construiremos  $w \in C^2(D)$  cumpliendo

$$\begin{cases} -\Delta w + \alpha w \geq c & \text{en } D, \\ w \geq 0 & \text{en } \bar{D}, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial_1 D, \\ \partial_\nu w = -\delta & \text{sobre } \partial_2 D. \end{cases}$$

A tal efecto, sea  $V_\rho^-$  un semi-entorno tubular de  $\Gamma_\delta$  definido por la representación paramétrica

$$x = x(\xi, s) = \xi + s\nu(\xi)$$

para  $\xi \in \Gamma_\delta$ ,  $s \in (-\rho, 0)$  y  $\rho \geq R$  tal que  $D \subset V_\rho^-$ . Tomando  $w(x) = w(s\nu) = \varphi(s)$  y teniendo en cuenta<sup>29</sup> la expresión del laplaciano en  $V_\rho^-$ , la construcción de tal  $w$  se reduce a encontrar  $\varphi(s)$  de modo que

$$\begin{cases} \varphi''(s) + (N-1)H\varphi'(s) \leq -c, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = -\delta, \end{cases}$$

donde hemos puesto  $H$  para la curvatura media de  $\Gamma$ , que es no negativa debido a la hipótesis de convexidad hecha sobre  $\Omega$ . Buscamos  $c$  de modo que  $\varphi(s) \geq 0$  para todo  $-R \leq s \leq 0$  y de entre las múltiples elecciones posibles tomaremos  $\varphi(s) := -\delta s \left(\frac{s}{2R} + 1\right)$  y entonces  $c = \delta/R$ , lo cual es posible porque como decíamos  $H \geq 0$ . Con este  $c$  sea ahora en  $D$  la función auxiliar  $\bar{u}(x) = w(x) + c(2N)^{-1}|x - x_0|^2$ . En  $D$  tenemos

$$-\Delta \bar{u} + \alpha \bar{u} = -\Delta w + \alpha w - c + \frac{\alpha c}{2N}|x - x_0|^2 \geq 0 = f.$$

En  $\partial_1 D$  se cumple  $\bar{u}(x) \geq \frac{c}{2N}R^2 = \frac{\delta R}{2N} \geq M \geq \tilde{u}(x)$  si  $R \geq 2MN/\delta$ . Es más, si ponemos  $I := \{x \in \partial_2 D : \tilde{u}(x) = 0\}$  (conjunto del cual no sabemos nada de momento, p.ej. podría ser vacío) entonces como  $\bar{u}$  es no negativa por construcción, sabemos que  $\tilde{u} \leq \bar{u}$  en todo  $\partial_1 D \cup I$ . Por otro lado, las condiciones de contorno implican que si  $\tilde{u}(x) > 0$  en algún punto del borde, es decir  $x \notin I$ , entonces  $\partial_\nu \tilde{u}(x) = \tilde{g}(x)$ . Por tanto, en  $\partial_2 D \setminus I$  se tiene

$$\partial_\nu \bar{u}(\xi) = \partial_\nu w(\xi) + cN^{-1}|x - x_0| \cos(\nu(\xi), \xi - x_0) \geq -\delta \geq \tilde{g}(\xi) = \partial_\nu \tilde{u}(\xi),$$

<sup>29</sup>. Cf. Sperb, *Maximum principles and their applications*, Academic Press, 1981.

donde hemos usado la convexidad de  $\Omega$  (positividad del coseno) en la primera desigualdad. El lema de comparación 5 aplicado a los conjuntos  $\partial_1 D \cup I$  y  $\partial_2 D \setminus I$  permite finalmente deducir que  $\tilde{u} \leq \bar{u}$  en  $\bar{D}$  y en particular

$$0 \leq \tilde{u}(x) \leq \frac{c}{2N} |\xi - x_0|^2, \text{ para } \xi \in \Gamma \cap B(x_0, R),$$

y entonces  $\tilde{u}(x_0) = 0$ . □

## APÉNDICE A.

### A.1. Movimientos rígidos.

Un **movimiento rígido**, es decir sin deformación, es la composición de una rotación y una traslación:  $y(x) = b + Qx$ , con una matriz  $Q$  ortogonal. Si excluimos las simetrías de los movimientos admisibles, la matriz  $Q$  no tiene el autovalor  $-1$  y por tanto  $I + Q$  es invertible y podemos definir  $R := (I - Q)(I + Q)^{-1}$ . A partir de esta matriz puede recuperarse  $Q$  mediante la transformación inversa  $R \mapsto (I + R)(I - R)^{-1}$ . Esta transformación se denomina **transformación de Cayley**.

El interés de esto es que  $R$  es antisimétrica, de modo que está determinada por  $N = 3$  coeficientes y todo movimiento rígido en  $\mathbb{R}^3$  excluyendo las simetrías puede describirse con dos vectores:

$$y(x) = b + r \times x = b + Rx,$$

donde  $r \times x$  designa el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y la matriz es

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Designaremos mediante  $\mathcal{R}$  el conjunto de los movimientos descritos de esta manera:

$$\mathcal{R} = \{y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3: y(x) = b + r \times x = b + Rx\}.$$

En el contexto de la elasticidad lineal, esta antisimetría de la matriz se traduce en que la forma bilineal  $a$  asociada al potencial elástico (cf. (14)) se anula exactamente en los movimientos rígidos. Si  $y \in \mathcal{R}$ , se cumple  $y_{i,j} = R_{ij} = -R_{ji} = -y_{j,i}$ , y entonces:

$$a(y, y) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(y) \varepsilon_{ij}(y) dx = \frac{1}{4} \int_{\Omega} a_{ijkl} (y_{k,l} + y_{l,k})(y_{i,j} + y_{j,i}) dx = 0.$$

**Teorema 11.** (*Rivlin-Ericksen*). Sea  $S^{3 \times 3}$  el conjunto de las matrices simétricas reales  $3 \times 3$  y sean  $i_A = (i_1(A), i_2(A), i_3(A))$  los coeficientes del polinomio característico  $\det(A - \lambda I)$  de  $A \in S^{3 \times 3}$ . Una función  $\hat{\sigma}: S \longrightarrow S \cap \{\det > 0\}$  cumple

$$\hat{\sigma}(Q A Q^{\top}) = Q \hat{\sigma}(A) Q^{\top}$$

para toda rotación  $Q$  si y sólo si existen funciones  $a_0(i_A), a_1(i_A), a_2(i_A)$  tales que

$$\hat{\sigma}(A) = a_0(i_A) I + a_1(i_A) A + a_2(i_A) A^2.$$

Recuérdese que los coeficientes  $i_j(A)$  son:  $i_1(A) = \text{tr } A$ ,  $i_2(A) = [(\text{tr } A)^2 - \text{tr } A^2]/2$ ,  $i_3(A) = \det A$ .

*Demostración.* Cf. [EGK11, teorema 5.13, p.253]. □

## A.2. Espacios de Sobolev y teorema de la traza.

En esta subsección citamos a la carrera la teoría necesaria de espacios de Sobolev, con el único propósito de fijar la notación y el contenido necesarios.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto. Designamos con la letra  $\alpha$  un multi-índice de dimensión  $N$ . Como es habitual ponemos  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)$  para el espacio  $C_0^\infty(\Omega)$  con la topología caracterizada por la siguiente convergencia de sucesiones:  $(\varphi^n) \subset \mathcal{D}$  converge a  $\varphi \in \mathcal{D}$  si existe un compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $\text{supp } \varphi^n \subset K$  para todo  $n$  y además para cada  $\alpha$  la sucesión  $\partial^\alpha \varphi^n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$  uniformemente. Su dual  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)$  consta de los funcionales lineales en  $\mathcal{D}$  que transforman sucesiones convergentes en  $\mathcal{D}$  en sucesiones convergentes en  $\mathbb{R}$  o equivalentemente  $T \in \mathcal{D}'$  si y sólo si existen constantes  $k, c$  tales que  $|T(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_\Omega |\partial^\alpha \varphi|$  para toda  $\varphi$ . Los elementos de  $\mathcal{D}'$  se denominan **distribuciones de Schwartz** sobre  $\Omega$ . Para cada multi-índice  $\alpha$  la derivada  $\partial^\alpha$  definida como  $\partial^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi)$  es un operador continuo en  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . El encaje  $L_{\text{loc}}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  definido como  $\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega f \varphi dx$  para  $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  permite identificar estas funciones con distribuciones, que denominamos **regulares**.

Decimos de una función medible  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que está en el **espacio de Sobolev**  $W^{m,p}(\Omega)$  si está en  $L^p(\Omega)$  y todas sus derivadas distribucionales hasta el orden  $m$  son distribuciones regulares inducidas por funciones de  $L^p(\Omega)$ . El caso  $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar  $(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$ . Para trabajar con funciones vectoriales consideraremos  $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})^N$ , que designaremos con negrita:  $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ . En  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  el producto escalar es

$$(u, v)_{\mathbf{H}^1(\Omega)} := \sum_i (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)} = \sum_i (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j} (u_{i,j}, v_{i,j})_{L^2(\Omega)}.$$

Podemos definir estos espacios de otro modo. Sea  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  el conjunto de las funciones  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tales que las seminormas  $p_{k,m}(\varphi) := \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |1 + x^2|^m \partial^\alpha \varphi$  son finitas para todo  $k$  y todo  $m$ . Claramente  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ , de hecho densamente, pero  $e^{-|x|^2}$  muestra que la inclusión contraria no se da. El dual de este espacio se designa  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  y consta de los funcionales lineales  $T$  tales que existe alguna constante  $C > 0$  de modo que  $|T\varphi| \leq C p_{k,m}(\varphi)$  para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Los elementos de  $\mathcal{S}'$  se llaman **distribuciones temperadas**. Debido a que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  toda distribución temperada se puede considerar como una distribución en  $\mathcal{D}'$  y además la inclusión inducida es inyectiva y continua.

Se demuestra que la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es un isomorfismo topológico en  $\mathcal{S}$  que puede trasladarse a  $\mathcal{S}'$  con  $\mathcal{S}' \ni v \mapsto \mathcal{F}v = \hat{v}$  definida como  $(\mathcal{F}v)(\varphi) := v(\mathcal{F}\varphi)$ . Por otra parte, el operador de multiplicación por la función  $\omega_s(x) := (1 + |x|^2)^{s/2}$  es continuo en  $\mathcal{S}$  por lo que puede extenderse a uno en  $\mathcal{S}'$  de la manera natural  $\mathcal{S}' \ni v \mapsto \omega_s v$  con  $(\omega_s v)(\varphi) := v(\omega_s \varphi)$ . Usando la transformada de Fourier inversa en  $\mathcal{S}'$  definimos el **multiplicador de Fourier con símbolo  $\omega$**  como el operador  $\Lambda^s v := \mathcal{F}^{-1}(\omega_s \hat{v})$  biyectivo y continuo en  $\mathcal{S}'$ . Su inversa es claramente  $\Lambda^{-s}$  y está definida en particular en todo  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Ponemos

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \Lambda^{-s}(L^2(\mathbb{R}^N)) = \{\mathcal{F}^{-1}(\omega_s \hat{v}) : v \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

y definimos la norma inducida por el producto escalar

$$(u, v)_{s,\mathcal{F}} := \int_{\mathbb{R}^N} \omega_s(\xi)^2 \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

Los espacios  $W^{m,2}(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N)$  antes definidos coinciden ahora con estos para  $s$  entero no negativo y las normas son equivalentes. La definición por medio de la transformada de Fourier es también válida cuando  $s < 0$  y se cumple además en general para todo  $s \in \mathbb{R}$  que  $H^s(\mathbb{R}^N)' = H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ . Cuando el dominio no es todo  $\mathbb{R}^N$  sino un abierto  $\Omega$ ,  $H^s(\Omega)$  se define como el conjunto de las restricciones de distribuciones en  $H^s(\mathbb{R}^N)$  a  $\Omega$  con la norma  $\|v\|_{H^s(\Omega)} := \inf \|\tilde{v}\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$  tomando el ínfimo entre todas las distribuciones  $\tilde{v}$  cuya restricción a  $\Omega$  es  $v$ . Este espacio también es de Banach pero sólo coincide con  $W^{s,p}(\Omega)$  cuando se imponen condiciones de regularidad a la frontera  $\partial\Omega$ . Se demuestra que la existencia de un isomorfismo  $W^{s,p}(\Omega) \simeq H^s(\Omega)$  es equivalente a la existencia de un **operador de extensión**  $E: W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  continuo y diversos teoremas de extensión aseguran su existencia. Un resultado de Calderón y Zygmund lo hace por ejemplo para dominios cumpliendo la condición del cono uniforme, en particular para aquellos con frontera  $C^1$ , y cuando  $s \in \mathbb{N}$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$ .  $W^{-m,p}(\Omega)$  designa el dual de  $W_0^{m,p}(\Omega) := \text{Cl}_{W^{m,p}(\Omega)} \mathcal{D}(\Omega)$ . Como  $\mathcal{D}$  es denso en  $W_0^{m,p}(\Omega)$  toda distribución  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  de la forma

$$T(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha T_{f_\alpha} \varphi, \text{ con } f_\alpha \in L^p(\Omega),$$

se extiende de manera única a  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , aunque en general no a  $W^{m,p}(\Omega)$ . De hecho todos los elementos del dual son de este tipo: puede encajarse  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como subespacio cerrado de una suma directa  $\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$  y del teorema de representación de Riesz se sigue que los elementos  $f$  de su dual son de la forma

$$\langle f, u \rangle_{W_0^{-m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (f_\alpha, \partial^\alpha u)_{L^p}, \text{ para } u \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

y para ciertas funciones  $f_\alpha \in L^p$ . En particular, si  $m = 1$ , los elementos de  $H^{-1}(\Omega)$  son distribuciones de la forma  $v \mapsto (u, v)_{L^2} - (u_i, v_i)_{L^2}$  con  $u, u_i \in L^2$ .

Para poder hablar de los valores de una función en  $W^{m,p}(\Omega)$  en el borde del dominio hemos de trabajar un poco puesto que se trata de clases de equivalencia de funciones iguales en casi todo punto. La técnica es definir un operador continuo que lleve funciones continuas en el borde a sus restricciones y extenderlo a todo  $W^{m,p}$ . Esto sólo se podrá hacer imponiendo ciertas condiciones geométricas al conjunto  $\Omega$  para las cuales necesitamos algunas definiciones previas.

Una función  $\varphi$  es de clase  $C^{k,\kappa}(\Omega)$  si es  $k$  veces continuamente diferenciable y acotada en  $\Omega$  y ella y todas sus derivadas son  $\kappa$ -Hölder continuas, es decir si existen constantes  $C_\alpha > 0$  tales que  $|\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)| \leq C_\alpha |x - y|^\kappa$ . Con la norma del supremo en todas las derivadas, este espacio es de Banach. Decimos que una aplicación biyectiva  $\phi: \Omega \rightarrow \Omega'$  entre abiertos de  $\mathbb{R}^N$  es un  **$(k, \kappa)$ -difeomorfismo** si sus funciones componentes  $\phi_i$  son de clase  $C^{k,\kappa}(\bar{\Omega})$  y las de la inversa  $\phi^{-1}$  de clase  $C^{k,\kappa}(\bar{\Omega}')$ , y además, si  $k \geq 1$ , el jacobiano está acotado por arriba y por abajo uniformemente en todo  $\bar{\Omega}$ . Decimos que un dominio  $\Omega$  es **suave de clase  $(k, \kappa)$**  si para cada punto  $x \in \partial\Omega$  puede encontrarse un entorno  $U_x$  que es  $(k, \kappa)$ -difeomorfo al cubo unidad  $\omega_1$  y de modo que la imagen de  $\partial\Omega \cap U_x$  es el plano medio de  $\omega_1$  y las dos regiones en que éste se separa corresponden al interior y el exterior de  $\Omega \cap U_x$ .<sup>30</sup>

30. Para leer esto con más detalle y precisión, véase [Wlo87, §2].

**Teorema 12.** (Teorema de la traza)

- a) Sea  $\Omega$  un dominio acotado y suave de clase  $(k, \kappa)$  y sea  $\frac{1}{2} < m \leq k + \kappa$ ; para  $m$  entero,  $k = m - 1$ ,  $\kappa = 1$  es admisible. Existe un **operador traza** continuo

$$\gamma_0: H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

con la propiedad de que

$$\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega} \text{ para } \varphi \in C^m(\bar{\Omega}) \text{ si } m \text{ es entero}$$

o para  $\varphi \in C^{\lfloor m \rfloor + 1}(\bar{\Omega})$  para  $m$  no entero.

- b) Supóngase de nuevo que  $\Omega$  es acotado y suave de clase  $(k, \kappa)$  y sea  $m - n > \frac{1}{2}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m + 1 \leq k + \kappa$ ; de nuevo para valores enteros de  $m$ ,  $k = m$ ,  $\kappa = 1$  es admisible. Existe un operador traza continuo

$$\gamma_n: H^m(\Omega) \longrightarrow \bigoplus_{j=0}^n H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

con la propiedad de que

$$\gamma_m(\varphi) = (\varphi|_{\partial\Omega}, \partial_\nu \varphi|_{\partial\Omega}, \dots, \partial_\nu^n \varphi|_{\partial\Omega}) \text{ para } \varphi \in C^{m+n}(\bar{\Omega}),$$

o bien  $\varphi \in C^{\lfloor m \rfloor + n + 1}(\bar{\Omega})$  para  $m$  no entero.

*Demostración.* Cf. [Wlo87, §8, teorema 8.7]. □

Es importante señalar que el resultado b) sigue siendo válido para  $m = 1$  y entonces  $\partial_\nu u$  se define como un funcional de  $H^{-1/2}(\Omega)$  cuando  $u \in H^1(\Omega)$  (cf. [HHNL88]).

**Lema 13.** *Densidad de funciones suaves.* Sea  $\Omega$  abierto con frontera  $C^1$ , entonces:

1.  $C_0^\infty(\bar{\Omega})$  es denso en  $W^{m,p}(\Omega)$ .
2.  $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$  es denso en  $W^{m,p}(\Omega)$ .
3.  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  es denso en  $W^{m,p}(\Omega)$ .

**Lema 14.** *Integración por partes en  $H^m(\Omega)$ .* Sean  $u, v \in H^m(\Omega)$  con  $m \geq 1$  y  $\Omega$  abierto, acotado y de frontera  $C^1$ . Entonces

$$\int_{\Omega} u v_{,i} dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i ds_x - \int_{\Omega} u_{,i} v dx,$$

donde la integral en el borde ha de interpretarse en el sentido de la traza y  $\nu_i$  es la  $i$ -ésima componente del vector normal unitario en el borde.

*Demostración.* Por el lema 13 existen  $(u^j), (v^k) \subset C_0^\infty(\bar{\Omega})$  tales que  $u^j \rightarrow u$  y  $v^k \rightarrow v$  en  $H^m(\Omega)$ . En particular  $u^j \rightarrow u$  y  $u_{,i}^j \rightarrow u_{,i}$  en  $L^2$  e igual para  $v$  y por lo tanto  $\int u^j \rightarrow \int u$  e igual para las derivadas y para  $v$ . Comprobamos lo primero: al tener  $\Omega$  medida finita  $\|\cdot\|_1 \leq c \|\cdot\|_2$  y entonces:

$$\left| \int_{\Omega} u^j dx - \int_{\Omega} u dx \right|^2 \leq \left( \int_{\Omega} |u^j - u| dx \right)^2 \leq c \int_{\Omega} |u^j - u|^2 dx \longrightarrow 0.$$

Aplicamos ahora el teorema de Gauß

$$\int_{\Omega} u^j v_{,i}^k dx = \int_{\partial\Omega} u^j v^k \nu_i ds_x - \int_{\Omega} u_{,i}^j v^k dx$$

y pasamos al límite en  $j$  y luego en  $k$ . Para la segunda integral usamos que la traza es un operador continuo  $H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ .  $\square$

**Teorema 15.** (*Algunos encajes de Sobolev*). Sea  $\Omega$  abierto y acotado y sean  $m < n$  números naturales. Entonces el encaje  $H_0^n(\Omega) \rightarrow H_0^m(\Omega)$  es compacto. Si además  $\Omega$  es de clase  $C^1$  entonces el encaje  $W^{n,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\Omega)$  es compacto.

*Demostración.* Cf. [Wlo87, §7] y [AF03, teorema 6.3, p. 85].  $\square$

### A.3. Existencia y unicidad de soluciones.

En los problemas elípticos presentados se parte de una formulación clásica con operadores diferenciales de segundo orden para llegar a una con operadores de primer orden. Esta se presenta como una igualdad o una desigualdad entre una forma bilineal y una lineal, es decir como algo de la forma  $a(u, v) \geq F(v)$  para toda  $v$  en cierto espacio. En esta sección mostramos que para la existencia y unicidad de solución a este problema es suficiente con una condición sobre la forma  $a(\cdot, \cdot)$ . Como sólo contemplamos el caso en el que  $a$  es simétrica y el espacio es de Hilbert, la respuesta para la igualdad  $a(u, v) = F(v)$  es una consecuencia simple del teorema de representación de Riesz. Sin embargo, cuando se trabaja con la desigualdad resulta útil «desviarse» por la minimización de cierto funcional  $I$  con un parentesco claro con la energía total del cuerpo. La idea es que si la ecuación es  $Lu = 0$ , entonces en cierto sentido la derivada de este funcional es  $I' = L$  y que por tanto sus puntos críticos serán soluciones. Las técnicas que empezaron con esta idea se denominan *cálculo de variaciones* o *métodos directos*.

Primero una definición y convenciones para esta sección: decimos que una forma bilineal en un espacio normado  $V$  es **V-elíptica** o **(fuertemente) coercitiva**, si existe una constante  $c_a > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq c_a \|v\|_V^2 \quad \text{para todo } v \in V.$$

En esta sección  $V$  es un espacio de Banach,  $K \subset V$  es cerrado, convexo y no vacío y  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es *continua, bilineal, simétrica y V-elíptica*. Además  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma *lineal y continua* y definimos para todo  $v \in V$ :

$$I(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - F(v).$$

**Teorema 16.** *El funcional  $I$  es estrictamente convexo en  $K$ , por tanto posee un único mínimo.*

*Demostración.* Sean  $u, h \in K$  arbitrarios con  $h \neq 0$  y  $u + h \in K$  Para  $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} I(u + \lambda h) &= \frac{1}{2} a(u + \lambda h, u + \lambda h) - F(u + \lambda h) \\ &= \frac{1}{2} a(u, u) + \lambda a(u, h) + \frac{\lambda^2}{2} a(h, h) - F(u) - \lambda F(h) \\ &= I(u) + \lambda (a(u, h) - F(h)) + \underbrace{\frac{\lambda^2}{2} a(h, h)}_{>0}. \end{aligned}$$

Así,  $\partial_\lambda I(u + \lambda h) = a(u, h) - F(h) + \lambda a(h, h)$  y  $\partial_\lambda^2 I(u + \lambda h) = a(h, h) > 0$  e  $I$  es convexo.  $\square$

**Teorema 17.** (*Stampacchia*) *Se cumple*

$$I(u) = \min_{v \in K} I(v) \iff a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \text{para todo } v \in K.$$

*Demostración.* La desigualdad es necesaria: sean  $v \in K$  arbitrario y  $h := v - u$ . Si  $\lambda \in (0, 1)$ , entonces toda combinación lineal convexa  $u + \lambda h$  está en  $K$  y debido a la convexidad de  $I$  se tiene

$$0 \leq I(u + \lambda h) - I(u) = \lambda (a(u, h) - F(h)) + \frac{\lambda^2}{2} a(h, h).$$

Dividiendo esto por  $\lambda$  resulta:

$$0 \leq a(u, h) - F(h) + \frac{\lambda}{2} a(h, h) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} a(u, h) - F(h).$$

La desigualdad es suficiente: sean  $v \in K$ ,  $v \neq u$  y  $h := v - u$ , entonces

$$\begin{aligned} I(v) - I(u) &= I(u + h) - I(u) \\ &= I(u) + a(u, h) - F(h) + \frac{1}{2} a(h, h) - I(u) \\ &= \underbrace{a(u, h) - F(h)}_{\geq 0} + \frac{1}{2} \underbrace{a(h, h)}_{> 0} > 0. \end{aligned}$$

□

**Corolario 18.** Si  $K$  es un subespacio afín de  $V$ ,  $K = v_0 + W$ ,  $v_0 \in V$  con  $W$  subespacio vectorial de  $V$ , entonces

$$I(u) = \min_{v \in K} I(v) \iff a(u, w) = F(w), \quad \text{para todo } w \in W.$$

*Demostración.* Como  $K = v_0 + W$  se tiene  $W = \{v - u : v \in K\}$  para cualquier  $u \in K$  y por tanto:

$$\begin{aligned} a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in K &\iff a(u, w) \geq F(w) \quad \forall w \in W \\ &\iff a(u, w) = F(w) \quad \forall w \in W, \end{aligned}$$

esto último ya que  $w \in W \iff -w \in W$ . □

**Teorema 19.** Sean  $V$  un espacio de Hilbert y  $K \subset V$  cerrado, convexo y no vacío y sean  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilineal, continua, simétrica y  $V$ -elíptica con constante  $c_a$  y  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua. Entonces existe un único  $u \in K$  tal que

$$a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \text{para toda } v \in K.$$

Además, si  $\tilde{F}: V \rightarrow \mathbb{R}$  es también lineal y continua y  $\tilde{u}$  es la solución correspondiente, entonces

$$\|u - \tilde{u}\| \leq c_a^{-1} \|F - \tilde{F}\|. \quad (30)$$

*Demostración. Unicidad:* basta con demostrar la relación (30). Si  $u$  y  $\tilde{u}$  son soluciones correspondientes a  $F$  y  $\tilde{F}$  respectivamente, tenemos

$$a(u, \tilde{u} - u) \geq F(\tilde{u} - u) \quad \text{y} \quad a(\tilde{u}, u - \tilde{u}) \geq \tilde{F}(u - \tilde{u}).$$

Sumando la segunda expresión a la primera, reordenando y usando la linealidad resulta

$$a(u - \tilde{u}, \tilde{u} - u) \geq (F - \tilde{F})(\tilde{u} - u)$$

y por tanto, tal como queríamos

$$0 \leq c_a \|\tilde{u} - u\|^2 \leq a(\tilde{u} - u, \tilde{u} - u) \leq \|\tilde{F} - F\| \|\tilde{u} - u\|.$$

*Existencia:* por el teorema 17 es suficiente con mostrar que  $I$  tiene un mínimo. Veamos que está acotado por abajo: para todo  $v \in V$  se cumple

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2} a(v, v) - F(v) \\ &\geq \frac{1}{2} c_a \|v\|^2 - \|F\| \|v\| \\ &= \left( \sqrt{\frac{c_a}{2}} \|v\| - \sqrt{\frac{1}{2c_a}} \|F\| \right)^2 - \frac{1}{2c_a} \|F\|^2 \\ &\geq -\frac{1}{2c_a} \|F\|^2. \end{aligned}$$

Sea entonces  $d := \inf \{I(v) : v \in K\}$  y sea  $(u_n) \subset K$  una sucesión minimizante:  $d \leq I(u_n) \leq d + 1/n$ . Entonces  $(u_n)$  es de Cauchy porque

$$\begin{aligned} c_a \|u_n - u_m\|^2 &\leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\ &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - 4a\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m), \frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\ &= 4I(u_n) + 4I(u_m) - 8I\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\ &\leq 4(d + 1/n) + 4(d + 1/m) - 8d \\ &\leq 4(1/n + 1/m). \end{aligned}$$

Por la completitud de  $V$  la sucesión es convergente a un  $u \in V$  y porque  $K$  es cerrado además  $u \in K$ . De la continuidad de  $I$  se sigue  $I(u) = d$ .  $\square$

En el caso de una ecuación en lugar de una inecuación tenemos el lema siguiente, que no es más que una consecuencia directa del teorema de representación de Riesz, para determinar la existencia y unicidad de solución. Por tanto, no es necesario recurrir a la minimización del funcional  $I$ .

**Lema 20.** Sean  $V$  un espacio de Hilbert,  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilineal, continua, simétrica y  $V$ -elíptica y  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua. Entonces existe un único  $u \in V$  tal que  $a(u, v) = F(v)$  para todo  $v \in V$ .

*Demostración.* La aplicación  $(u, v)_V := a(u, v)$  define un producto escalar en  $V$ . Según el teorema de representación de Riesz, a toda forma  $F$  del dual de  $V$  le corresponde un único elemento  $u \in V$ , tal que  $F(v) = (u, v)_V = a(u, v)$ .  $\square$

**Corolario 21. Problema de Dirichlet.** Sean  $\Omega$  un dominio abierto y acotado de  $\mathbb{R}^N$  y  $\alpha \geq 0$  una constante y sea  $f \in L^2(\Omega)$ . Existe una única función  $u \in H_0^1(\Omega)$  solución débil del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

en el sentido de que para toda  $v \in H_0^1(\Omega)$  se cumple la igualdad

$$a(u, v) = F(v),$$

con  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \alpha \int_{\Omega} u v \, dx$  y  $F(v) := \int_{\Omega} f v \, dx$ .

*Demostración.* En el caso  $\alpha > 0$  esto es una aplicación directa del lema 20 en  $H_0^1(\Omega)$ . La forma lineal  $F$  es continua en  $L^2(\Omega)$  así que en particular también en  $H_0^1(\Omega)$ . Además  $a(\cdot, \cdot)$  es claramente bilineal, simétrica y continua en  $H_0^1(\Omega)$ , y es también coercitiva porque

$$a(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min\{1, \alpha\} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Cuando  $\alpha = 0$  es suficiente con tener en cuenta que como  $\Omega$  es acotado la seminorma  $|u|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  es equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , gracias a la desigualdad de Poincaré y Friedrichs

$$\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega).$$

Y entonces  $a(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = |u|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ , para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$ .  $\square$

**Corolario 22.** Sean  $\Omega$  un dominio abierto y acotado de  $\mathbb{R}^N$  y  $\alpha \geq 0$  una constante y sean  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Existe una única función  $u \in H^1(\Omega)$  solución débil del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

en el sentido de que para toda  $v \in H_0^1(\Omega)$  se cumple la igualdad

$$a(u, v) = F(v),$$

con  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \alpha \int_{\Omega} u v \, dx$  y  $F(v) := \int_{\Omega} f v \, dx$ , y además

$$\gamma(u) = g,$$

siendo  $\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$  el operador traza.

*Demostración.* Basta con llevar el problema a la forma del corolario 21. Sea  $\tilde{g} \in \gamma^{-1}(g) \subset H^1(\Omega)$  y sea  $\tilde{f}(v) := F(v) - a(\tilde{g}, v)$  para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Como  $f$  y  $a$  son continuas en  $H_0^1$ , esto es un elemento del dual  $H^{-1}$ . El problema

$$a(u_0, v) = \tilde{f}(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

tiene solución única  $u_0 \in H_0^1$ , por la demostración del corolario 21. Sea ahora  $u := u_0 + \tilde{g}$ . Por la linealidad del operador traza,  $u = g$  en  $\Gamma$  y además para toda  $v \in H_0^1$ , por la elección de  $\tilde{f}$  ocurre que

$$a(u, v) = a(u_0, v) + a(\tilde{g}, v) = \tilde{f}(v) + F(v) - \tilde{f}(v) = F(v).$$

$\square$

#### A.4. La desigualdad de Korn.

El ingrediente que mayor dificultad presenta para aplicar los resultados de la sección A.3 es la demostración de la coercitividad de la forma bilineal. En los problemas de la sección 2 se supone que el tensor de coeficientes  $a_{ijkl}$  cumple una condición de elipticidad que sirve precisamente para esto, empleando la *desigualdad de Korn*. Aquí recorreremos un largo camino hasta demostrarla en el teorema 30, para después aplicarla a los problemas estudiados más arriba.

Como siempre, suponemos  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y con una frontera al menos  $C^1$ , aunque en realidad los resultados de esta sección siguen siendo válidos en condiciones más generales, en concreto para dominios Lipschitz-continuos.<sup>31</sup> Definimos

$$\mathcal{E}(v) := \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dx \quad \text{y} \quad |v|^2 := \int_{\Omega} v_i v_i \, dx.$$

Nuestro propósito es probar que existe una constante  $c > 0$  tal que  $\mathcal{E}(v) + |v|^2 \geq c \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$ . Nótese que esta desigualdad no es evidente porque en el lado izquierdo de la desigualdad aparecen combinaciones de todas las derivadas de cada función componente, incluidas cruzadas que pueden tomar valores negativos, mientras que en el derecho no. Pero la recíproca sí debido a lo mismo. En el camino a la demostración es esencial un lema debido a Jacques-Louis Lions, que afirma que si una distribución está en  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  y su gradiente también, entonces se trata de una (distribución inducida por una) función de  $L^2(\Omega)$ . Aunque esto es el contenido del teorema 3.2 de Duvaut y Lions [DL76], preferimos apartarnos de su demostración por dos motivos: por un lado emplea espacios de Sobolev con valores en un Banach y para definirlos satisfactoriamente es necesario introducir la integral de Bochner, por otro lado hace uso constante de identificaciones entre espacios que al escribirse explícitamente llevan a varias páginas de tecnicismos. Por todo esto, seguimos el camino de Amrouche y Girault [AG94] aunque sin entrar en toda su generalidad: allí se demuestra para dominios con bordes Lipschitz-continuos, lo cual no nos es necesario y complica todo sustancialmente.

**Teorema 23.** (Peetre, Tartar)<sup>32</sup> Sean  $A: E_1 \rightarrow E_2$  lineal y continuo y  $B: E_1 \rightarrow E_3$  compacto entre los espacios de Banach  $E_1, E_2, E_3$  y tales que para todo  $u \in E_1$  se cumple

$$\|u\|_{E_1} \simeq \|Au\|_{E_2} + \|Bu\|_{E_3}. \quad (31)$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\dim \ker A < \infty$ ,  $A: E_1/\ker A \rightarrow \mathcal{R}(A)$  es un isomorfismo y  $\mathcal{R}(A)$  es cerrado en  $E_2$ .
2. Sea  $G$  de Banach y sea  $M: E_1 \rightarrow G$  acotado y distinto de cero en  $\ker A \setminus \{0\}$ . Entonces

$$\|u\|_{E_1} \simeq \|Au\|_{E_2} + \|Mu\|_G. \quad (32)$$

*Demostración.*

1.  $\ker A$  tiene dimensión finita si y sólo si la bola unidad  $\mathcal{U}_{\ker A} = \{u \in \ker A: \|u\|_{E_1} = 1\}$  es compacta. Sea una sucesión  $(u^n) \subset \mathcal{U}_{\ker A}$ . Por estar acotada, la imagen por el operador compacto tiene una subsucesión  $(Bu^{n_k})$  convergente en  $E_3$ . Ésta es por tanto de Cauchy en  $E_3$  y como  $Au^{n_k} = 0$ , la equivalencia de normas (31) prueba que es de Cauchy en  $E_1$ . Pero  $\ker A$  es cerrado porque  $A$  es continuo, de modo que la subsucesión converge en  $\ker A$  y  $\mathcal{U}_{\ker A}$  es compacta.

Formamos el cociente  $X := E_1/\ker A$  que es de Banach con la norma habitual del cociente  $\|\dot{u}\|_X := \inf_{u \in \dot{u}} \|u\|_{E_1}$  y este ínfimo se alcanza por tener  $\ker A$  dimensión finita: existe  $\tilde{u} \in E_1$  tal que  $\|\dot{u}\|_X = \|\tilde{u}\|_{E_1}$ .

El operador  $A: X \rightarrow \mathcal{R}(A)$  (por ejemplo  $\dot{u} \mapsto A\tilde{u}$ ) es lineal, continuo y biyectivo por construcción, luego sólo falta comprobar que tiene inversa continua, es decir que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|A^{-1}(A\dot{u})\|_X = \|\dot{u}\|_X \leq C \|A\dot{u}\|_{E_2} \text{ para todo } A\dot{u} \in \mathcal{R}(A).$$

31. Cf. [DL76, §III.3.3] ó [AG94, §2].

32. Cf. [GR86, Teorema 2.1, p.18]. Si ponemos  $E_1 = (H^1)^n$ ,  $E_2 = (L^2)^{2n}$ ,  $E_3 = (L^2)^n$ , entonces la condición del teorema es  $\tilde{\alpha} \|u\|_{E_1}^2 \geq \sqrt{\mathcal{E}(u)} + \|u\|_{E_3} \geq \alpha \|u\|_{E_1}^2$  y la primera desigualdad es clara, la segunda se sigue inmediatamente de la de Korn.

Para llegar a una contradicción supongamos que existe una sucesión  $(\dot{u}^n) \subset X$  tal que

$$\|\dot{u}^n\|_X = 1 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A \dot{u}^n\|_{E_2} = 0.$$

Entonces la compacidad de  $B$  y  $1 = \|\dot{u}^n\|_X = \|\tilde{u}^n\|_{E_1}$  implican que existe una subsucesión  $(B \dot{u}^{n_k})$  convergente en  $E_3$ . Pero  $\|A \dot{u}^n\|_{E_2} \rightarrow 0$  y (31) implican entonces cuando  $r, s \rightarrow \infty$  que

$$\|\tilde{u}^{n_r} - \tilde{u}^{n_s}\|_{E_1} \leq c (\|A \tilde{u}^{n_r} - A \tilde{u}^{n_s}\|_{E_2} + \|B \tilde{u}^{n_r} - B \tilde{u}^{n_s}\|_{E_3}) \rightarrow 0,$$

es decir,  $(\tilde{u}^{n_k})$  es de Cauchy y por tanto convergente en  $E_1$ . Pero su límite sólo puede ser un elemento del núcleo de  $A$  porque  $\|A \tilde{u}^{n_k}\| \rightarrow 0$  y  $A$  es continuo, así que  $\dot{u}^{n_k} \rightarrow \dot{0}$ , una contradicción.

Por último, hemos demostrado que  $A: X \rightarrow \mathcal{R}(A)$  es un isomorfismo y como  $X$  es de Banach, su imagen también, así que es cerrado en  $E_2$ .

2. Sea  $G$  de Banach y  $M: E_1 \rightarrow G$  continuo con  $\ker M \subset \ker A$ . Sólo es necesario probar que existe  $C > 0$  tal que

$$C \|u\|_{E_1} \leq \|Au\|_{E_2} + \|Mu\|_G$$

ya que la otra desigualdad es una consecuencia trivial de la continuidad de  $A$  y  $M$ . De nuevo para llegar a una contradicción supongamos que tenemos una sucesión  $(u^n) \subset E_1$  tal que

$$\|u^n\|_{E_1} = 1 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} (\|Au^n\|_{E_2} + \|Mu^n\|_G) = 0.$$

Entonces existe una subsucesión  $(u^{n_k})$  tal que  $(Bu^{n_k})$  converge en  $E_3$  y como antes  $\|Au^n\|_{E_2} \rightarrow 0$  y (31) implican que  $(u^{n_k})$  es de Cauchy y por tanto convergente a un  $u \in E_1$ . Como  $\|u^n\|_{E_1} = 1$  se cumple  $\|u\|_{E_1} = 1$  pero además  $Au = 0$  y  $Mu = 0$  por hipótesis, una contradicción.  $\square$

La siguiente equivalencia de normas se debe a Nečas en las condiciones más generales ya mencionadas y tiene una demostración larga y complicada, pero como en nuestro contexto estamos suponiendo un borde  $C^1$  y sólo necesitaremos  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  la demostración es mucho más sencilla y puede encontrarse en [DL76]. Obsérvese que el teorema sólo dice algo interesante cuando  $m \leq 0$ .

**Teorema 24.** (Nečas) Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y de frontera  $C^1$  y sean  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in (1, \infty)$  arbitrarios. Existe una constante  $C = C(\Omega, m, p) > 0$  tal que para toda  $f \in W^{m,p}(\Omega)$  se cumple

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{W^{m-1,p}(\Omega)} + \|\nabla f\|_{\mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)}).$$

Como consecuencia directa y que luego será útil tenemos:

**Corolario 25.** Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y de frontera  $C^1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  arbitrario y  $p \in (1, \infty)$ . Entonces:

1. La imagen de  $\text{grad}: W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)$  es un subespacio cerrado.
2. Si  $\Omega$  es conexo, entonces existe una constante  $C = C(\Omega, m, p) > 0$  tal que para toda (clase de equivalencia)  $\dot{u} \in W^{m,p}(\Omega)/\mathbb{R}$  se cumple

$$\|\dot{u}\|_{W^{m,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)}. \quad (33)$$

3. Para todo subconjunto abierto  $\Omega' \subset \subset \Omega$  de medida positiva existe una constante  $C_{\Omega'} = C_{\Omega'}(\Omega', \Omega, m, p) > 0$  tal que para toda  $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C_{\Omega'} (\|u\|_{W^{m,p}(\Omega')} + \|\nabla u\|_{\mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)}), \quad (34)$$

*Demostración.* Aplicamos el teorema 23 tomando  $E_1 = W^{m,p}(\Omega)$ ,  $E_2 = \mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)$ ,  $E_3 = W^{m-1,p}(\Omega)$ ,  $A = \text{grad}$ ,  $B = \text{id}$ . Puesto que el dominio es acotado, el encaje canónico dado por  $B = \text{id}: W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m-1,p}(\Omega)$  es compacto (teorema 15). Además, para toda  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  tenemos

$$\|u\|_{W^{m-1,p}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

lo que unido al teorema de Nečas, 24, proporciona la equivalencia de normas que falta para aplicar el teorema 23, y tenemos la parte 1.

Para la afirmación 2., observemos que  $\ker(\text{grad}) = \mathbb{R}$  cuando  $\Omega$  es conexo, así que el teorema 23 afirma que el operador gradiente es un isomorfismo entre  $W^{m,p}(\Omega)/\mathbb{R}$  y su imagen. De modo que existe una constante  $C > 0$  tal que para toda (clase de equivalencia)  $\dot{u} \in W^{m,p}(\Omega)/\mathbb{R}$  se cumple

$$\|\dot{u}\|_{W^{m,p}(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{u \in \dot{u}} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)}.$$

Por último, sea  $G = W^{m,p}(\Omega')$  y sea  $M: W^{m,p}(\Omega') \rightarrow W^{m,p}(\Omega)$  la identidad. Como  $\Omega'$  tiene medida positiva entonces  $\|M\lambda\|_{W^{m,p}(\Omega')} = \|\lambda\|_{W^{m,p}(\Omega)} \neq 0$  en  $\mathbb{R}^* = \ker(\text{grad}) \setminus \{0\}$  y aplicamos de nuevo el teorema 23. La equivalencia de normas (32) implica la tercera afirmación.  $\square$

Lo siguiente es una adaptación de la demostración que en [GR86] se hace para el caso  $m=0$  y  $p=2$  y será un ingrediente en la demostración del teorema 28.

**Corolario 26.** Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y de frontera  $C^1$  y  $m \in \mathbb{Z}$  y  $p \in (1, \infty)$ . Si

$$Y_{m,p} := \{f \in W_{\text{loc}}^{m,p}(\Omega) : \nabla f \in \mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)\}$$

entonces

$$Y_{m,p} = W^{m,p}(\Omega).$$

*Demostración.* Sea  $\Omega' \subset \subset \Omega$  de medida positiva y definamos

$$\llbracket u \rrbracket := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega')} + \|\nabla u\|_{\mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega')}.$$

Como  $\Omega'$  tiene medida no nula,  $\llbracket \cdot \rrbracket$  define una norma en  $Y_{m,p}$  que además es equivalente a  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$  debido a la desigualdad (34), por lo que  $W^{m,p}(\Omega)$  es de Banach para esta norma. De hecho demostramos que es denso en  $Y_{m,p}$  para esta norma:

Puesto que todo conjunto abierto con frontera (al menos) Lipschitz es unión finita de conjuntos estrellados con frontera Lipschitz (y todos los resultados de esta sección son válidos en dominios con frontera Lipschitz) podemos suponer que  $\Omega$  es estrellado con respecto a un punto  $y$ . Trasladando este punto al origen esto equivale a decir que

$$\theta \bar{\Omega} \subset \Omega \text{ para } j \in [0, 1) \text{ y } \bar{\Omega} \subset \theta \Omega \text{ para } j > 1.$$

Tomamos  $\theta > 1$  y ponemos  $\Omega_\theta := \theta \Omega$ . Para una función  $\varphi$  continua en  $\Omega$  hacemos el cambio de variable  $\varphi \mapsto \varphi_\theta$  definido en  $\Omega_\theta$  por  $\varphi_\theta(x) = \varphi(x/\theta)$ , y lo extendemos a distribuciones  $\mathcal{D}'(\Omega) \ni u \mapsto u_\theta \in \mathcal{D}'(\Omega_\theta)$  mediante

$$\langle u_\theta, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_\theta)} := \theta^N \langle u, \varphi_{1/\theta} \rangle \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\theta).$$

Entonces

$$\nabla u_\theta = (1/\theta) (\nabla u)_\theta, \text{ para toda } u \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \|u_\theta - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0, \text{ para toda } u \in W^{m,p}(\Omega),$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \|u_\theta - u\|_{W^{m-1,p}(\Omega)} = 0, \text{ para toda } u \in W^{m-1,p}(\Omega).$$

Por lo tanto, si  $u \in Y_{m,p}$ , entonces  $u_\theta \in W^{m,p}(\Omega)$  para todo  $\theta > 1$  y en vista de lo anterior

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \|u_\theta - u\| = 0,$$

por lo que  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ .  $\square$

Para los siguientes resultados es conveniente definir los dos conjuntos siguientes:

$$U_{m,p} := \{u \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \text{ en } \Omega\}, m \geq 1 \text{ entero}$$

y

$$U_{0,p} := \{u \in \mathbf{L}^p(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \text{ en } \Omega, u \cdot \nu = 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

así como sus correspondientes *espacios polares*, como se describen en la sección A.5. Demostramos ahora que una distribución en  $\mathbf{W}^{-m,p}(\Omega)$ ,  $m \geq 0$  tiene un potencial del cual es el gradiente si y sólo si se anula en estos espacios. Más adelante veremos que es suficiente con saber que una distribución se anula en

$$\mathcal{V} := \{v \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\}$$

para concluir lo mismo.

**Lema 27.** Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y de frontera  $C^1$  y  $m \geq 0$  entero,  $p \in (1, \infty)$  arbitrarios. Sea  $p'$  el conjugado de  $p$ :  $1/p + 1/p' = 1$ . Una distribución  $f \in \mathbf{W}^{-m,p}(\Omega)$  cumple

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \text{ para toda } \varphi \in U_{m,p'}$$

si y sólo si existe  $g \in W^{-m+1,p}(\Omega)$  tal que  $f = \nabla g$ . Si además el conjunto  $\Omega$  es conexo, entonces  $g$  está definida unívocamente por  $f$  salvo una constante y existe  $C > 0$  independiente de  $f$  tal que

$$\|\dot{g}\|_{W^{-m+1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|f\|_{\mathbf{W}^{-m,p}(\Omega)}. \quad (35)$$

*Demostración.*

*Caso  $m \geq 1$ .* Que la condición es suficiente es evidente: si  $f = \nabla g$ , entonces dada  $\varphi \in U_{m,p'}$  calculamos  $\langle f, \varphi \rangle = \langle \nabla g, \varphi \rangle = \langle g_{,i}, \varphi_i \rangle = -\langle g, \varphi_{i,i} \rangle = -\langle g, \operatorname{div} \varphi \rangle = 0$ .

Para ver que es necesaria, obsérvese que  $\langle -\operatorname{grad} f, \varphi \rangle = \langle f, \operatorname{div} \varphi \rangle$  significa que el operador acotado  $-\operatorname{grad}: W^{-m+1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}^{-m,p}(\Omega)$  es el dual de  $\operatorname{div}: \mathbf{W}_0^{m,p'}(\Omega) \rightarrow W_0^{m-1,p'}(\Omega)$  y además de acuerdo con el corolario 25 su imagen  $\mathcal{R}(\operatorname{grad})$  es un subespacio cerrado de  $\mathbf{W}^{-m,p}(\Omega)$ . Por el teorema de la imagen cerrada (teorema 35), tenemos entonces

$$\mathcal{R}(\operatorname{grad}) = (\ker \operatorname{div})^\circ = U_{m,p'}^\circ$$

lo cual es precisamente la afirmación de la condición necesaria: si  $f \in \mathbf{W}^{-m,p}(\Omega)$  se anula en  $U_{m,p'}$  es que  $f \in U_{m,p'}^\circ$  y entonces es el gradiente de alguna  $g \in \operatorname{dom}(\operatorname{grad}) = W^{-m+1,p}(\Omega)$ . La cota superior (35) es exactamente (33).

*Caso  $m = 0$ .* Puesto que  $U_{1,p'} \subset U_{0,p'}$ , una función  $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$  que se anula en  $U_{0,p'}$  también lo hace en  $U_{1,p'}$ , de modo que el razonamiento anterior con  $m = 1$  prueba que  $f = \nabla g$  para alguna  $g \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ , pero entonces  $g \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$  y el corolario 25 proporciona de nuevo la cota.  $\square$

Como anunciábamos, es suficiente con mirar las funciones  $C_0^\infty(\Omega)$ :

**Teorema 28.** Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y de frontera  $C^1$  y  $m$  un entero no negativo,  $p \in (1, \infty)$  arbitrarios. Sea  $p'$  el conjugado de  $p$ :  $1/p + 1/p' = 1$  y supóngase que  $f \in \mathbf{W}^{-m,p}(\Omega)$  cumple

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Entonces se cumple la conclusión del lema 27, es decir: existe  $g \in W^{-m+1,p}(\Omega)$  de modo que  $f = \nabla g$ . Si además el conjunto  $\Omega$  es conexo, entonces  $g$  está determinada por  $f$  de manera única salvo una constante y existe  $C > 0$  independiente de  $f$  tal que (35) se cumple.

*Demostración.* Aplicando el argumento que sigue a cada componente conexa, podemos suponer que  $\Omega$  es conexo. Es suficiente con probar  $f = \nabla g$  para alguna  $g \in W_{\text{loc}}^{-m+1,p}(\Omega)$  porque gracias al corolario 26 sabemos entonces que  $g \in Y_{-m+1,p} = W^{-m+1,p}(\Omega)$ .

Sea entonces  $(\Omega_k)_{k \geq 1}$  una sucesión creciente de conjuntos abiertos conexos de clase  $C^1$  tal que  $\bar{\Omega}_k \subset \Omega$  y  $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$ . Tomemos una función cualquiera  $h$  sin divergencia y en  $\mathbf{W}_0^{m,p'}(\Omega_k)$  si  $m \geq 1$  o en  $\mathbf{L}^{p'}(\Omega_k)$  y además con  $h \cdot \nu = 0$  en el borde si  $m = 0$  y extendámosla por cero fuera de  $\Omega_k$ . Consideremos una aproximación de la identidad  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0}$  con  $\text{supp } \rho_\varepsilon \subset \bar{B}(0, \varepsilon)$ . Entonces para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, tenemos

$$\rho_\varepsilon * h \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_\varepsilon * h) &= \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) h(x-y) dy \\ &= \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} h(y-x) dy \\ &= \rho_\varepsilon * \text{div } h \\ &= 0, \end{aligned}$$

y por tanto  $\rho_\varepsilon * h \in \mathcal{V}$ . Ahora, por la hipótesis sobre  $f$

$$0 = \langle f, \rho_\varepsilon * h \rangle \longrightarrow \langle f, h \rangle, \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

y el lema 27 aplicado a cada  $\Omega_k$  y cada restricción  $f|_{\Omega_k}$  implica que existen funciones  $g_k \in W^{-m+1,p}(\Omega_k)$  tales que  $f|_{\Omega_k} = \nabla g_k$ . Las diferencias  $g_{k+1} - g_k$  son constantes así que podemos fijarlas para que sea  $g_{k+1} = g_k$  en  $\Omega_k$  y entonces si  $\Omega' \subset \subset \Omega$ , existe  $g \in W^{-m+1,p}(\Omega')$  tal que  $f = \nabla g$  en  $\Omega'$ . Es decir  $g \in Y_{-m+1,p} := \{g \in W_{\text{loc}}^{-m+1,p}(\Omega) : \nabla g \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega)\} = W^{-m,p}(\Omega)$  por el corolario 26 y la cota (35) es de nuevo (33).  $\square$

Llegamos al teorema que usaremos para demostrar la desigualdad de Korn.

**Teorema 29.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y de frontera  $C^1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in (1, \infty)$  arbitrarios y

$$X_{m,p}(\Omega) := \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega)\}.$$

Se cumple

$$X_{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

En particular

$$X_{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega). \quad (36)$$

*Demostración.* Demostramos la inclusión no trivial. Sea  $f \in X_{m,p}(\Omega)$ .

Caso  $m \leq 0$ . Observemos que para toda  $\varphi \in \mathcal{V}$  se cumple

$$\langle \nabla f, \varphi \rangle = -\langle f, \text{div } \varphi \rangle = 0,$$

luego por el teorema 28 existe una  $g \in W^{m,p}(\Omega)$  tal que  $\nabla f = \nabla g$ . La diferencia  $f - g$  es por tanto constante en cada componente conexa de  $\Omega$  y como éste es acotado, esto implica que  $f \in W^{m,p}(\Omega)$ .

*Caso  $m > 0$ .* El argumento anterior muestra que  $f$  pertenece al menos a  $L^p(\Omega)$  así que está en  $W^{m,p}(\Omega)$ .  $\square$

Por fin podemos demostrar el resultado principal de esta sección:

**Teorema 30. Desigualdad de Korn.** *Existe una constante  $c > 0$ , dependiente de  $\Omega$  tal que para todo  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  se cumple*

$$\mathcal{E}(v) + |v|^2 \geq c \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2.$$

*Demostración.* Sea  $E = \{v \in L^2(\Omega) : \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)\}$ . Obsérvese que este espacio es en principio distinto de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  porque de que las sumas  $v_{i,j} + v_{j,i}$  estén en  $L^2(\Omega)$  no se sigue necesariamente que cada uno de los sumandos también.

En  $E$  definimos  $\langle u, v \rangle_E := \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} u_i v_i dx$ . Esto es claramente un producto escalar y con la norma inducida el espacio  $E$  es de Hilbert. En efecto, si  $v^n$  es una sucesión de Cauchy en  $E$ , entonces lo son cada  $v_i^n$  y  $\varepsilon_{ij}(v^n)$  en  $L^2(\Omega)$ . Si  $v_i$  y  $w_{ij}$  son los límites respectivos en  $L^2(\Omega)$ , como  $L^2(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  $\varepsilon_{ij}(v)$  y  $w_{ij}$  definen distribuciones en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  y lo que afirmamos es que  $\varepsilon_{ij}(v) = w_{ij}$  como tales, y como esto último está en  $L^2(\Omega)$ , por tanto  $v \in E$ . Para comprobar la igualdad tomemos  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ; por definición:

$$2(\varepsilon_{ij}(v), \varphi)_{\mathcal{D}'} := -(v_i, \varphi_{,j})_{\mathcal{D}'} - (v_j, \varphi_{,i})_{\mathcal{D}'}$$

Estas distribuciones son regulares, así que se trata de integrales y

$$\begin{aligned} -\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} v_i^n \varphi_{,j} dx + \int_{\Omega} v_j^n \varphi_{,i} dx \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} v_{i,j}^n \varphi dx + \int_{\Omega} v_{j,i}^n \varphi dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 2\varepsilon_{ij}(v^n) \varphi dx \\ &= 2 \int_{\Omega} w_{ij} \varphi dx. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que con  $\mu(\Omega) < \infty$  se tiene  $\|u^n - u\|_{L^1} \leq \|u^n - u\|_{L^p} \rightarrow 0 \Rightarrow \int u^n \rightarrow \int u$ .

Queremos ahora demostrar que este espacio  $E$  es idéntico a  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  como conjunto: por un lado es evidente que  $\mathbf{H}^1(\Omega) \subseteq E$ , por otro tomamos una  $v \in E$  y queremos aplicar (36) a las distribuciones  $v_{i,j}$ . Simplemente cancelando los sumandos tenemos la representación

$$v_{i,jk} = \varepsilon_{ik,j}(v) + \varepsilon_{ij,k}(v) - \varepsilon_{jk,i}(v).$$

Por otra parte, según la sección A.2, de  $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$  se sigue que los  $\varepsilon_{ij,k}(v)$  están en  $H^{-1}(\Omega)$ , así que los  $v_{i,jk} \in H^{-1}(\Omega)$  también. Aplicando (36) a los  $v_{i,j}$  obtenemos que  $v_{i,j} \in L^2(\Omega)$ , es decir  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ .

Ahora, la inclusión  $j: \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow E$  es una biyección continua y en particular cerrada, de modo que su inversa también es cerrada.<sup>33</sup> El teorema de la gráfica cerrada implica entonces que  $j^{-1}$  es continua, así que  $\|v\|_E \geq \|j^{-1}\| \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ .  $\square$

**Teorema 31.** *Si  $\Gamma_U \subset \Gamma$  tiene medida positiva, y existe  $c_0 > 0$  tal que para toda matriz simétrica  $\xi$  y casi todo  $x \in \Omega$*

$$a_{ijkl}(x) \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c_0 \xi_{ij} \xi_{ij},$$

<sup>33</sup> Tómesese  $e^n \rightarrow e$  en  $E$  tal que  $j^{-1}(e^n) \rightarrow h$  en  $\mathbf{H}^1$ , entonces poniendo  $h^n := j^{-1}(e^n)$ , se tiene  $h^n \rightarrow h$  en  $\mathbf{H}^1$  y  $j(h^n) \rightarrow e$  en  $E$  y como  $j$  es cerrada, esto significa que  $j(h) = e \Rightarrow h = j^{-1}(e)$ .

entonces la forma bilineal  $a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx$  es elíptica en

$$V_0 := \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma_U\},$$

es decir existe una constante  $\alpha_0 > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \text{ para toda } v \in V_0.$$

*Demostración.* Por la condición de elipticidad sobre los coeficientes  $a_{ijkl}$  tenemos que  $a(v, v) \geq c_0 \mathcal{E}(v)$  y la desigualdad de Korn proporciona  $c \|v\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq \mathcal{E}(v) + |v|^2$ , luego si fuera  $\mathcal{E}(v) \geq c_1 |v|^2$  con  $c_1 > 0$ , tendríamos

$$c \|v\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq \mathcal{E}(v) + |v|^2 \leq \mathcal{E}(v) + c_1^{-1} \mathcal{E}(v) \leq c_2 a(v, v),$$

así que el problema se reduce a demostrar que existe dicha constante  $c_1$ . Además, podemos restringir el problema al caso  $|v| = 1$ , ya que de resolverlo para estas funciones y tomando  $v$  arbitraria, basta aplicarlo a  $v/|v|$  así:

$$1 c_1 \leq \mathcal{E}(v |v|^{-1}) = |v|^{-2} \mathcal{E}(v) \Rightarrow \mathcal{E}(v) \geq c_1 |v|^2.$$

Supongamos entonces que no existe dicha constante para las funciones  $v \in V_0$  con  $|v| = 1$ : si  $c_n \rightarrow 0$  encontramos una sucesión  $(v^n) \subset V_0$  con  $|v^n| = 1$  tal que  $\mathcal{E}(v^n) \leq c_n \rightarrow 0$ . Por la desigualdad de Korn,  $c \|v^n\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq c_n + 1$ , las  $v^n$  están acotadas en  $\mathbf{H}^1$ , luego el teorema de Eberlein (teorema 33) implica que una subsucesión  $(v^{n_k})$  converge débilmente a una  $v^0$  en  $\mathbf{H}^1$ , pero como  $v^{n_k} \in V_0$ , un conjunto convexo, el límite débil  $v^0 \in V_0$  también. La convexidad y diferenciabilidad Gâteaux del funcional  $\mathcal{E}$  prueban su semicontinuidad inferior débil:  $\mathcal{E}(v^0) \leq \liminf \mathcal{E}(v^{n_k}) = 0$ , es decir  $\mathcal{E}(v^0) = 0$  y por tanto  $a(v^0, v^0) = 0$ . Ahora bien, sabemos por la sección A.1 que  $a(\cdot, \cdot)$  sólo se anula en los movimientos rígidos  $\mathcal{R}$  y como  $\Gamma_U$  tiene medida positiva la única función  $v^0 \in V_0 \cap \mathcal{R}$  es  $v^0 = 0$ . Así que  $v^{n_k} \rightharpoonup 0$  en  $\mathbf{H}^1$ .

Por último, el teorema 34 implica que el encaje compacto  $j: \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$  (cf. teorema 15) transforma la subsucesión débilmente convergente en  $\mathbf{H}^1$  en una convergente en  $\mathbf{L}^2$ , es decir  $v^{n_k} \rightarrow 0$  en  $\mathbf{L}^2$ , lo cual contradice la suposición  $|v^n| = 1$ .  $\square$

Obsérvese que en este teorema es crucial el hecho de que el conjunto  $\Gamma_U$  tenga medida positiva, es decir, que haya unos desplazamientos prefijados en alguna región del borde. La explicación intuitiva es que si el sólido no está fijo (tomando en concreto  $U = 0$ ) en ningún punto, es decir  $\Gamma_U = \emptyset$ , este podría rotar o desplazarse por el efecto de las fuerzas externas. Pero la forma bilineal  $a$  es *invariante por movimientos rígidos* (cf. sección A.1), lo que significa que si no se excluyen de los movimientos admisibles de algún modo, la forma no puede ser elíptica puesto que  $a(\rho, \rho) = 0$  para todo movimiento rígido  $\rho$ . Por otra parte, esta invarianza no es un detalle técnico y tiene cierto sentido físico, ya que  $a(\cdot, \cdot)$  representa el trabajo realizado por el potencial elástico acumulado y en un modelo razonable éste no debería ser alterado por traslaciones o rotaciones.

Cuando no hay condiciones de tipo Dirichlet, los movimientos rígidos son parte del conjunto de movimientos admisibles  $V_0$  y han de excluirse de otro modo si el modelo lo permite. Aunque esto no es el caso del problema de Signorini porque las traslaciones son relevantes, sí que pueden ignorarse en una versión del problema 2 con  $\Gamma_U = \emptyset$ .

**Teorema 32.** *Si  $\Gamma_U = \emptyset$ , entonces la forma  $a(\cdot, \cdot)$  es elíptica en el cociente por los movimientos rígidos*

$$V := \mathbf{H}^1(\Omega) / \mathcal{R},$$

es decir: existe una constante  $\alpha_0 > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2 \text{ para toda } v \in V.$$

*Demostración.* Recuérdense que la norma en el cociente está dada por

$$\|v\|_V := \inf_{\rho \in \mathcal{R}} \|v + \rho\|_{\mathbf{H}^1}$$

y que  $\mathcal{E}(\rho) = 0$  para todo  $\rho \in \mathcal{R}$ . Según el teorema 30 y los comentarios que le siguen,  $(\mathcal{E}(v) + |v|^2)^{1/2}$  es una norma equivalente a  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ , de modo que la desigualdad es equivalente a

$$a(v, v) \geq \alpha_1 \inf_{\rho \in \mathcal{R}} [\mathcal{E}(v) + |v + \rho|^2] = \alpha_1 \mathcal{E}(v) + \alpha_1 \inf_{\rho \in \mathcal{R}} |v + \rho|^2.$$

De la elipticidad de los coeficientes  $a_{ijkl}$  se sigue que es suficiente con demostrar que existe  $c_1 > 0$  tal que  $\mathcal{E}(v) \geq c_1 \inf_{\rho \in \mathcal{R}} |v + \rho|^2$ , porque entonces

$$\alpha_1 \mathcal{E}(v) + \alpha_1 \inf_{\rho \in \mathcal{R}} |v + \rho|^2 \leq (\alpha_1 + \alpha_1 c_1^{-1}) \mathcal{E}(v) \leq c_2 a(v, v).$$

Puesto que  $\mathcal{R}$  es cerrado en  $\mathbf{L}^2$ , existe la proyección ortogonal  $P: \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}$  y se cumple

$$\inf_{\rho \in \mathcal{R}} |v + \rho|^2 = |v - Pv|^2.$$

Ponemos  $w = v - Pv \in \mathcal{R}^\perp$  y se trata entonces de demostrar que existe  $c_1 > 0$  tal que  $\mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(w) \geq c_1 |w|^2$ , pero como en el teorema 30, poniendo  $w |w|^{-1}$  vemos que es suficiente con probarlo para  $w$  con  $|w| = 1$ , es decir que  $\mathcal{E}(w) \geq c_1$  para todo  $w = v - Pv$  con  $|w| = 1$ .

Supongamos que no existe esta constante. Entonces dada  $c_m \rightarrow 0$  encontramos  $(w^m)$  con  $w^m$  de la forma  $v^m - Pv^m$  y  $|w^m| = 1$  tal que  $\mathcal{E}(w^m) \leq c_m \rightarrow 0$  y por la desigualdad de Korn,  $w^m$  es acotada en  $\mathbf{H}^1$ :

$$c \|w^m\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq \mathcal{E}(w^m) + |w^m|^2 \leq c_m + 1,$$

así que el teorema 33 implica que existe una subsucesión  $(w^{m_k})$  débilmente convergente en  $\mathbf{H}^1$  a una  $w^0$ . Ahora bien,  $\mathcal{E}$  es convexo y Gâteaux diferenciable, así que es débilmente inferiormente semicontinuo y  $\mathcal{E}(w^0) \leq \liminf \mathcal{E}(w^{m_k}) = 0$ , es decir  $\mathcal{E}(w^0) = 0$  y por tanto  $w^0 \in \mathcal{R} = \ker \mathcal{E}$ . Pero por otro lado cada  $w^{m_k} \in \mathcal{R}^\perp$  que es débilmente cerrado, de modo que  $w^0 \in \mathcal{R}^\perp$  y sólo puede ser  $w^0 = 0$ . Es decir,

$$w^{m_k} \rightharpoonup 0 \text{ en } \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Por último,  $\mathbf{H}^1$  se encaja de manera compacta en  $\mathbf{L}^2$ , así que el teorema 34 implica  $w^{m_k} \rightarrow 0$  en  $\mathbf{L}^2$ , una contradicción con  $|w^{m_k}| = 1$ .  $\square$

Esta técnica de pasar al cociente puede generalizarse: si el operador diferencial estudiado es de orden  $k$  y la forma asociada se anula en alguna familia de polinomios de orden  $k - 1$ , puede pasarse al cociente por ésta y adaptando las demostraciones obtener estos resultados. (cf. Nečas «*Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*», 1967).

### A.5. Otros resultados del análisis funcional.

Sigue un *pot-pourri* de teoremas que hacen falta en algún momento u otro y cuya demostración omitimos por salirse del ámbito de este trabajo.

**Teorema 33.** (Eberlein, 1947) *Sea  $X$  normado. Entonces  $X$  es reflexivo si y sólo si toda sucesión acotada en  $X$  tiene una subsucesión débilmente convergente.*

*Demostración.* cf. Limaye, *Functional Analysis*. Teorema 16.5, p. 288 de la 2ª edición.  $\square$

**Teorema 34.** *Sea  $T: X \rightarrow Y$  un operador compacto entre espacios normados. Si  $x^n \rightarrow x$  en  $X$  entonces  $Tx^n \rightarrow Tx$  en  $Y$ .*

*Demostración.* cf. Limaye, *Functional Analysis*. Teorema 17.5, p. 312 de la 2ª edición.  $\square$

Para el siguiente teorema, que es una generalización al caso infinito-dimensional de lo que ocurre en algebra lineal, necesitamos algunas definiciones. Recuérdese que si  $A: E \rightarrow F$  es un operador acotado entre espacios de Banach,  $\mathcal{R}(A)$  designa su imagen y  $\ker A$  su núcleo. Su **operador dual**  $A': F' \rightarrow E'$  se define como

$$A'(\varphi) := \varphi \circ A = \langle \varphi, A(\cdot) \rangle_{F'}.$$

Dado un subespacio  $U \subset E$ , se define el **espacio polar** mediante

$$U^\circ := \{\varphi \in E': \langle \varphi, u \rangle_{E'} = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Análogamente, si  $V \subset E'$ , se define

$$V^\circ := \{u \in E: \langle \varphi, u \rangle_{E'} = 0 \text{ para todo } \varphi \in V\}.$$

**Teorema 35.** *(De la imagen cerrada. Banach, 1932) Sean  $A: E \rightarrow F$  un operador acotado entre espacios de Banach y  $A': F' \rightarrow E'$  su dual. Son equivalentes:*

- a)  $\mathcal{R}(A)$  es cerrado.
- b)  $\mathcal{R}(A) = (\ker A')^\circ$ .
- c)  $\mathcal{R}(A')$  es cerrado.
- d)  $\mathcal{R}(A') = (\ker A)^\circ$ .

*Demostración.* Cf. Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer. Capítulo 4, §5, p. 205 de la 6ª edición.  $\square$

El siguiente teorema estudia bajo qué condiciones la parte positiva de una función conserva sus propiedades de derivación débil.<sup>34</sup> <sup>35</sup> Aunque el enunciado es para espacios de Besov, es suficiente con considerar el caso que nos interesa de espacios de Sobolev.

**Teorema 36.** *(Bourdaud, Meyer [BM91]) Dados  $p, q \in [1, \infty]$  y  $s \in (0, 1 + 1/p)$ , existe una constante  $C > 0$  tal que para toda  $f \in B_{q,p}^s(\mathbb{R}^N)$  se cumple  $\| |f| \|_{B_{q,p}^s} \leq C \|f\|_{B_{q,p}^s}$ . En particular si  $p = q = 2$  y  $s < 3/2$ :*

$$\| |f| \|_{H^s} \leq C \|f\|_{H^s}.$$

### A.6. Un $\varepsilon$ de Historia.

En 1933 Antonio Signorini presentó una versión preliminar del problema expuesto en la sección 3. Más adelante lo propondría durante un curso en el *Istituto Nazionale di Alta Matematica* ([Fic70]) y lo ampliaría en [Sig59], considerando funciones de clase  $C^1$  a trozos. La ambigüedad en las condiciones de contorno forzaba la pregunta de si el problema estaba bien planteado y fue Gaetano Fichera, quien poco antes de la muerte de Signorini en 1963 demostrara la existencia y unicidad de soluciones generalizándolo a  $H^1$ . En [Fic84] Fichera escribe:

<sup>34</sup>. Una alternativa es un resultado conocido para  $W^{1,p}(\Omega)$  como puede verse por ejemplo en [Sta65].

<sup>35</sup>. Recuérdese que  $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ .

«The name of Signorini shall be remembered not only for its association with nonlinear elasticity, but also for his study of the unilateral problems which he was the first to pose in 1933 (...). The study of this problem[s] has opened a whole new and suggestive chapter in analysis and mathematical physics.»

El capítulo de la matemática que menciona es ahora conocido como *ecuaciones variacionales* y fue precisamente iniciado por Fichera en su artículo de 1963 en el que aplicó las técnicas que hemos visto en la sección 3 para resolver el problema de Signorini. Poco tiempo después Guido Stampacchia presentaría<sup>36</sup> una generalización del teorema de Lax-Milgram para inecuaciones variacionales  $a(u, v) \geq F(v)$  en un convexo  $V$  del cual hemos visto una versión simplificada en la sección A.3 gracias a que disfrutamos de la simetría de  $a(\cdot, \cdot)$ . Más tarde aparecerían de nuevo estos resultados sistematizados y con aplicaciones en un trabajo de Jacques-Louis Lions y Stampacchia<sup>37</sup>. Con el tiempo este campo ha encontrado numerosas aplicaciones en física y problemas de contorno abierto en general. La tesis de Brézis [Bré72] en 1972 representó un hito en el estudio de inecuaciones variacionales y problemas unilaterales como el de Signorini: en ella se establecen resultados de existencia y regularidad fundamentales para ecuaciones escalares. Por ejemplo que el problema 4 tiene solución en  $H^2$  y esta es la mayor regularidad posible no importa cuán regulares sean los datos.<sup>38</sup> Entre las monografías dedicadas a estas cuestiones, es quizás la de Kinderlehrer y Stampacchia [KS00] la más accesible que hemos encontrado.

Para la aplicación al caso de la elasticidad lineal fue J.L. Lions quien demostró por primera vez el lema esencial para la demostración que presentamos del teorema 30 mucho antes de su publicación en [DL76].<sup>39</sup> Más tarde fue generalizado en varias ocasiones hasta llegar a su forma más general, dada por Amrouche y Girault en [AG94] (para su aplicación al problema de Stokes) como se encuentra, en parte, en el teorema 29.

### A.7. Comentarios sobre las fuentes.

Las secciones 2.1 a 2.4 están extraídas casi en su totalidad del libro de Eck, Garcke y Knabner [EGK11], secciones 5.5, 5.7 y 5.10, así como del libro de Temam y Miranville [TM05], sección 3.4 y capítulo 13. La sección 2.6 sigue Duvaut y Lions [DL76], capítulo III.

La discusión del problema de Signorini de la sección 3 sigue en parte los artículos de Fichera [Fic66] y [Fic70] y utiliza la tesis [Kra01] así como los libros de Duvaut y Lions [DL76], capítulos I y III, y (marginalmente) de Hlaváček et al. [HHNL88], capítulo 2.

La sección 4 sigue el artículo de Kinderlehrer [Kin81], apartados 5 y 6 mientras que 4.2 reproduce los resultados principales de los trabajos de Díaz [Día80] y Díaz y Jiménez [DJ88]. La tesis de Brézis [Bré72] sirve de referencia para muchas de las cuestiones planteadas aquí.

Los apéndices A.1, A.2 y A.3 recogen algunos resultados elementales y un repaso fugaz de espacios de Sobolev extraído de Wloka [Wlo87] y Adams [AF03]. El resto proviene de Duvaut y Lions [DL76], capítulos III, §3.3 y las notas de clase de Brokate [Bro12], aunque en A.4 para demostrar el teorema principal para la desigualdad de Korn se han seguido el artículo de Amrouche y Girault [AG94] y un par de veces el §I.2 de Girault, Raviart [GR86]. Para A.6 se ha seguido el trabajo de Fichera [Fic84].

36. En Stampacchia, *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 258, 1964, pp. 4413-4416.

37. Cf. Lions, Stampacchia, *Variational inequalities*. Comm. Pure Appl. Math. 20, 1967, pp. 493-501.

38. Cf. [Bré72, teorema I.10 y observación I.26].

39. Cf. Magenes y Stampacchia *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1958, Vol. 12, página 320, nota 27.

Como referencia general sobre problemas elípticos y técnicas variacionales han servido los libros de Evans [Eva10] y ocasionalmente Kinderlehrer y Stampacchia [KS00]. Sobre espacios de Sobolev y distribuciones Adams [AF03] y Wloka [Wlo87]. Este último ha sido particularmente útil como una referencia general precisa y exhaustiva. Para la mecánica de medios continuos se han consultado los libros de Temam y Miranville [TM05], y Eck, Garcke y Knabner [EGK11], así como las notas de clase de Alt [Alt12].

Ocasionalmente han servido otras publicaciones cuyas referencias se proporcionan dentro del mismo texto por encontrarse fuera del ámbito de este trabajo (por ejemplo manuales de análisis funcional o artículos con resultados relacionados) o sólo haber sido muy superficialmente repasadas.



## BIBLIOGRAFÍA

- [AF03] Robert A. Adams y John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*, volumen 140 de *Pure and applied mathematics*. Academic Press, 2nd edition, 2003.
- [AG94] Chérif Amrouche y Vivette Girault. Decomposition of vector spaces and applications to the Stokes problem in arbitrary dimension. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 44(1), 1994.
- [Alt12] Hans Wilhelm Alt. *Mathematische Kontinuumsmechanik*. Vorlesung im Wintersemester 2011/12. Technische Universität München, 2012.
- [BM91] Gérard Bourdaud y Yves Meyer. Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. *Journal of Functional Analysis*, 97(2):351–360, 1991.
- [Bré72] Haïm Brézis. Problèmes unilatéraux. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (51):1–168, 1972.
- [Bro12] Martin Brokate. *Partielle Differentialgleichungen*. Vorlesung im Wintersemester 2011/12. Technische Universität München, feb 2012.
- [Día80] Jesús Ildefonso Díaz. Localización de fronteras libres en inecuaciones variacionales estacionarias dadas por obstáculos. In *3. Congreso de ecuaciones diferenciales y Aplicaciones*, pages 1–12. Santiago, jun 1980. Universidad de Santander y Universidad Complutense de Madrid.
- [DJ88] Jesús Ildefonso Díaz y Raúl Francisco Jiménez. Boundary behaviour of solutions of the Signorini problem. *Bolletino U.M.I.*, 7(2-B):127–139, 1988.
- [DL76] G. Duvaut y J.L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*, volumen 219 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1976.
- [EGK11] Christof Eck, Harald Garcke, y Peter Knabner. *Mathematische Modellierung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2. edition, 2011.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volumen 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.
- [Fic66] Gaetano Fichera. Elastostatics problems with unilateral constraints. *Séminaire Jean Leray*, 3:64–68, 1966.
- [Fic70] Gaetano Fichera. Unilateral constraints in elasticity. *Actes, Congrès international de Mathématiques*, 3:79–84, 1970.
- [Fic84] Gaetano Fichera. The Italian contribution to the mathematical theory of elasticity. *Meccanica*, (19):259–268, 1984.
- [FLS65] R.P. Feynman, R.B. Leighton, y M.L. Sands. *Mainly electromagnetism and matter*, volumen 2 de *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1965.
- [GR86] Vivette Girault y P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Springer series in computational mathematics. Springer, 1986.
- [HHNL88] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, y J. Lovšek. *Solution of variational inequalities in mechanics*, volumen 66 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1st edition, 1988.
- [Kin81] David Kinderlehrer. Remarks about Signorini’s problem in linear elasticity. *Annali della scuola normale superiore di Pisa*, 8(4):605–645, 1981.
- [Kra01] Rolf Hermann Krause. *Monotone multigrid methods for Signorini’s problem with friction*. PhD thesis, Berlin, jul 2001.
- [KS00] David Kinderlehrer y Guido Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications*, volumen 31 de *SIAM’s classics in applied mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000.
- [Sig59] Antonio Signorini. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*, 18:95–139, 1959.
- [Sta65] Guido Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Annales de l’Institut Fourier*, 15(1):189–258, 1965.
- [TM05] Roger Temam y Alain Miranville. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2005.
- [Wlo87] J. Wloka. *Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, University of Kiel, 2002 digital printing edition, 1987.